CORSO

di

MATTEMATICHE

PER USO

delle Scuole Militari.

LIVORNO

DALLA TIPOGRAFIA E LITOGRAFIA SARDI.

1830.

RACCOLTA
D' OPERE
AD USO DELLE
SCUOLE MILITARI

VOLUME II.

Digitized by Google

CORSO
DI
MATTEMATICHE
AD USO
DELLE SCUOLE MILITARI
COMPILATO

DAI PROFESSORI DI MATTEMATICHE

ALLAIZE, BILLY, PUISSANT, BOUDROT.

TRADUZIONE

DEL TENENTE

INCARICATO DELLA DIREZIONE
DEGLI STUDJ DEI RR. CADETTI D'ARTIGLIERIA IN TOSCANA.

TOMO SECONDO

Indocti discant, et ament meminisse periti.

IN LIVORNO

DALLA TIPOGRAFIA E LITOGRAFIA DI GIULIO SARDI.

1830.

Digitized by Google

CORSO
DI MATTEMATICHE.

SEGUITO DELL'ALGEBRA.

DELLE PROPORZIONI E DELLE PROGRESSIONI.

85. Invece dell'Algebra che mancava agli antichi geometri per formare dell'equazioni, s'impiegavano molto le proporzioni. I moderni ne hanno conservato l'uso; ma potrebbero farne intieramente di meno. Per quanto se ne sia già parlato nel compendio dell'Aritmetica, crediamo opportuno dovere ritornarci, perchè l'Algebra permette di spiegarne la teoria con maggiore semplicità e generalità.

Delle proporzioni Aritmetiche.

86. In ogni proporzione aritmetica o equidifferenza, la somma degli estremi è eguale a quella dei medii: infatti sia la proporzione $a.b : c.d$, essendo $a - b = c - d$ si ha sempre $a + d = b + c$.

In conseguenza di ciò, è facile di conoscere uno dei termini mediante altri tre supposti cogniti. Infatti sia l'equidifferenza.

$$a.b : c.x, \text{ dunque } x = b + c - a.$$

Così si hanno due regole generali. Un estremo è eguale alla somma dei medii, meno l'estremo cognito, ed un medio è eguale alla somma degli estremi, meno il medio cognito. Se i due medii fossero eguali ed incogniti, allora ognuno di essi sarebbe eguale alla metà della somma degli estremi. Infatti sia la proporzione $a.x : x.b$;

dunque $$2x = a + b \text{ ed } x = \frac{a+b}{2}.$$

Quello che comunemente chiamasi *medio aritmetico* fra due numeri, è uno dei medii eguali in una proporzione aritmetica, di cui gli estremi sono questi due numeri. Così 2 nella proporzione $1.2:2.3$, e b nella proporzione $a.b:b.c$, sono i medii aritmetici, cioè 2 fra 1 e 3; b, fra a e c.

APPLICAZIONI.

I. PROBLEMA. Secondo i fisici quando un corpo cade liberamente per alcuni secondi, gli spazii che percorre essendo presi 4 a 4 formano una proporzione aritmetica. Secondo questa legge, supponghiamo che una bomba, che ha impiegato 4 secondi a cadere, abbia percorso $4^m,904$ nel primo secondo, $14^m,713$ nel secondo, e $24^m,522$ nel terzo. Quanti nel quarto ossia ultimo secondo?

Soluzione. L'enunciato del problema ci dà la proporzione aritmetica,

$$4^m,904 \,.\, 14^m,713 : 24^m,522 \,.\, x^m = 34^m,331.$$

La bomba ha dunque percorso $34^m,331$ nel quarto secondo, e $78^m,470$ nei 4 secondi.

II. PROBLEMA. Il diametro d'una palla da 24 dev'essere compreso fra $149^{\text{millimetri}},17$ e $147^{mm},47$. Qual è la grandezza media di questo diametro che dicesi anche *calibro*?

Soluzione. Sia x questo diametro, avremo:

$$149,17 \,.\, x : x \,.\, 147,47;$$

dunque $$x = \frac{149,17 + 147,47}{2} = 148^{mm},32.$$

Delle proporzioni Geometriche.

87. In ogni proporzione geometrica o per quoziente, il prodotto degli estremi è eguale a quello dei medii. Infatti sia la proporzione geometrica $a:b::c:d$; essendo $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, oppure $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, si trova $ad=bc$ ossia $a\times d=b\times c$.

Reciprocamente se si hanno due prodotti eguali, composti ognuno di due fattori, si può dedurne una proporzione, prendendo per estremi i due fattori dell'uno dei prodotti, e per medii i fattori dell'altro prodotto: poichè siano mq, e pn, questi due prodotti. A cagione di $m\times q = n\times p$ si ha, dividendo tutto per nq, $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$, dunque $m:n::p:q$.

Digitized by Google

Dall'equazione $ad = bc$, si deduce successivamente $a = \frac{bc}{d}$; $b = \frac{ad}{c}$; $c = \frac{ad}{b}$; e $d = \frac{bc}{a}$; dunque ogni estremo è eguale al prodotto dei medii diviso per l'altro estremo; ed ogni medio è eguale al prodotto degli estremi diviso per l'altro medio. È facile dunque il calcolare uno dei termini della proporzione, quando ci si conoscano gli altri tre.

Se i medii sono eguali, la proporzione è detta *continua*, tal è quella:

$$a : b :: b : c.$$

La quantità che rappresenta i due medii eguali, dicesi *medio proporzionale geometrico* fra a e c. In questo caso particolare, essendo $b \times b$ ossia $b^2 = ac$, si ha $b = \sqrt{ac}$; cioè che il termine medio è eguale alla radice quadrata del prodotto degli estremi. Quando quattro quantità sono in proporzione, le loro potenze, e le loro radici dello stesso esponente lo sono pure. Sia la proporzione $a : b :: c : d$;

dunque $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; $\frac{a^m}{b^m} = \frac{c^m}{d^m}$, e $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \frac{\sqrt[m]{c}}{\sqrt[m]{d}}$;

dunque $a^m : b^m :: c^m : d^m$;

e $\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} :: \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d}$;

Quando si hanno due proporzioni, si può, moltiplicandole o dividendole termine per termine, formare una terza proporzione: così dalle due proporzioni;

$$a : b :: c : d; \text{ ed } m : n :: p : q;$$

si deduce 1.° $am : bn :: cp : dq$;

2.° $\frac{a}{m} : \frac{b}{n} :: \frac{c}{p} : \frac{d}{q}$;

proporzioni che si verificano essendo $ad = bc$ ed $mq = np$.

Rammentandosi che si sono chiamati *antecedenti* il primo ed il terzo termine, e *conseguenti* il secondo ed il quarto, è facile di vedere; 1.° che in ogni proporzione geometrica, la somma o la differenza degli antecedenti, sta alla somma o alla differenza dei conseguenti, come un antecedente sta al suo conseguente. Così dalla proporzione $a : b :: c : d$, se ne può dedurre questa; $a + c : b + d :: a : b$; $a - c :$

Digitized by Google

$b - d :: a : b$; e per conseguenza $a + c : b + d :: a - c : b - d$, proporzione che si verifica essendo $ad = bc$.

In generale in una serie di rapporti eguali, la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti, come un antecedente qualunque sta al suo conseguente. Infatti sia

$$a : aq :: b : bq :: c : cq :: d : dq :: \text{ec.},$$

quella serie di rapporti eguali, se ne può dedurre questa proporzione,

$$(a + b + c + d + \text{ec.}) : (a + b + c + d\,\text{ec.})\,q :: a : aq,$$

poichè il prodotto dei medii è eguale a quello degli estremi.

APPLICAZIONI.

Le regole del tre, di sconto, di società, ec. degli aritmetici, si fanno per mezzo della proporzione geometrica, siccome abbiamo veduto nella prima parte di questo corso. Quello che più imbarazza i principianti, si è la disposizione dei 4 termini della proporzione, di cui 3 sono dati. Quello che vi ha di più semplice a dire su questo particolare, è di formare o due quozienti, o due prodotti eguali fra i 4 termini, e dedurne una proporzione.

Regola del Tre diretta.

88. La paga d'un corpo militare di 12500 uomini, è stata di $62562^{f},50^{c}$. Quale sarà quella d'un corpo di 18750 uomini?

Si suppone come la prima proporzionale al numero degli uomini, cioè che il soldo d'ogni uomo sia lo stesso nei due corpi.

Soluzione. La paga d'un uomo è espressa da $\frac{62562^{f},50^{c}}{12500}$ nel primo corpo, e da $\frac{x^{fr}}{18750}$ nel secondo; si ha dunque

$$\frac{x^{fr}}{18750} = \frac{62562,^{fr}50^{c}}{12500};$$

quindi $$x : 18750 :: 62562,50 : 12500;$$

ed $$x = \frac{62562,50 \times 18750}{12500} = 93843^{fr},75.$$

L' equazione $\frac{x}{18750} = \frac{62562,50}{12500}$ avrebbe subito data la paga x richiesta, senza ricorrere alla proporzione.

Regola del Tre indiretta.

Si hanno viveri per 30 giorni in una piazza assediata; si vogliono fare durare per 36 giorni. A che cosa bisogna ridurre le razioni ordinarie, che si suppongono essere in quel momento di 375 grammi?

Soluzione. Sia x il numero dei grammi d'ogni razione ridotta, ed n il numero delle razioni per giorno; avremo $375^{gr} \times n$, ossia $375\,n$ per il consumo per giorno, e la totalità dei viveri sarà evidentemente espressa alla volta, moltiplicando $375\,n$ per 30, ed nx per 36. Si ha dunque fra questi prodotti eguali l' equazione

$$36.nx = 30.375n, \text{ ossia } 36x = 30.375;$$

se ne deduce la proporzione

$$36 : 30 :: 375 : x = \frac{375 \times 30}{36} = 312^{gr},5.$$

Si sarebbe potuto immediatamente ottenere questo valore dall' equazione

$$36\,x = 375 \times 30,$$

che dà

$$x = \frac{375 \times 30}{36} = 312^{gr},5.$$

Nuova prova dell' inutilità delle proporzioni nelle regole del tre indirette, o piuttosto della facilità di risolverle con dell' equazioni.

Regola di società o di ripartimento semplice.

89. Lo scopo di questa regola è quello di dividere un numero dato in parti proporzionali a dei numeri parimente dati. Proponghiamoci per esempio, di dividere la quantità a in 3 parti, x, y, z, proporzionali a tre numeri dati m, n e p.

Avremo fra x ed y la relazione,

$$\frac{y}{x} = \frac{n}{m}, \text{ d' onde } y = \frac{nx}{m};$$

e fra x e z la relazione,

$$\frac{z}{x} = \frac{p}{m}, \text{ d' onde } z = \frac{px}{m};$$

Digitized by Google

ora a motivo d' $x+y+z=a$, è evidente che

$$x+\frac{nx}{m}+\frac{px}{m}=a, \text{ oppure } x\frac{(m+n+p)}{m}=a;$$

equazione da cui in principio si deduce,

$$x=\frac{a\times m}{m+n+p}; \text{ quindi } y=\frac{a\times n}{m+n+p}; \text{ e } z=\frac{a\times p}{m+n+p},$$

e se piace le proporzioni,

$$m+n+p : a :: m : x; \; m+n+p : a :: n : y,$$

ed $$m+n+p : a :: p : z.$$

Cioè la *somma dei numeri proporzionali dati*, *sta al numero che si vuole dividere*, *come uno dei numeri proporzionali dati*, *sta alla parte proporzionale corrispondente*; e tale è la regola data in aritmetica. Essa riducesi siccome apparisce, a quella che abbiamo ottenuta (n.° 59) con un processo un poco diverso.

Secondo questa regola, si vede che bisogna fare tante proporzioni, e per conseguenza tante moltiplicazioni e divisioni, quante parti proporzionali ci sono da trovare; ma si possono ridurre tutte le divisioni ad una sola.

Infatti se si suppone $\frac{a}{m+n+p}=q$, avremo

$$x=q\times m; \; y=q\times n; \; z=q\times p.$$

Basterà così il dividere a per $m+n+p$, e non si avranno più che delle moltiplicazioni da fare. Questa regola consiste dunque a dividere esattamente, o per approssimazione a per $m+n+p$, ed a moltiplicare il quoziente successivamente per m, per n, e per p. I ragionamenti sarebbero gli stessi per un numero qualunque di parti proporzionali.

ESEMPIO.

Dividere una paga di 23740fr,50, fra 10 compagnie, a proporzione degli uomini di cui sono composte: la prima essendo di 100 uomini, la 2.a di 96, la 3.a di 104, la 4.a di 102, la 5.a di 95, la 6.a di 92, la 7.a di 90, l'8.a d' 88, la 9.a d' 84, e la 10.a d' 80.

Divido 23740fr,50 per 931, numero totale degli uomini delle 10 compagnie, il quoziente 25fr,50 essendo successivamente moltiplicato per il numero degli uomini di ciascuna compagnia, si trova venire 2550fr alla 1.a; 2448fr alla 2.a; 2652 alla 3.a; 2601 alla 4.a; 2422fr,50 alla 5.a; 2346fr

alla 6.ª ; 2295 alla 7.ª ; 2244^{fr} all' 8.ª ; 2142^{fr} alla 9.ª ; e 2040^{fr} alla 10ª .

Si possono anche evitare le moltiplicazioni, e semplicizzare il calcolo in questa guisa. Nell' esempio precedente è evidente che il quoziente 25^{fr},50^{c} , esprime la paga che tocca ad ogni uomo, poichè si è divisa la paga totale per il numero degli uomini: in conseguenza di ciò si forma la tavola seguente:

Uomini.	Paga.
1	25^{f},50
2	51, 00
3	76, 50
4	102, 00
5	127, 50
6	153, 00
7	178, 50
8	204, 00
9	229, 50

Colla tavola non restano che delle somme da fare, come qui sotto si vede:

1. *Compagnia.*		2. *Compagnia.*	
Uomini.	Paga.	Uomini.	Paga.
100	2550^{fr}	90	2295^{fr}
		6	153
		96	2448

SPIEGAZIONE.

1.ª *Compagnia.* Per 100 uomini, prendo nella tavola dirimpetto l' 1, ed avanzo la virgola di due posti verso la destra, ciò che mi dà 2550 franchi.

2.ª *Compagnia.* Decompongo 96 in 90 + 6; per 90 ossia 9 diecine, prendo nella tavola dirimpetto al 9, avanzo la virgola d' un posto, ed ho 2295^{fr}; per 6 prendo 153 nella tavola dirimpetto al 6, senza nulla cangiare, ed ho 2448^{fr} per paga di 96 uomini.

Si vede come si opererebbe per le 8 altre compagnie.

Si è in qualche modo costretti a ricorrere a questo metodo, quando il numero delle parti proporzionali è grandissimo.

Digitized by Google

Sia per esempio da repartire una contribuzione militare di franchi 152407,060205 fra 1000 proprietarii, a proporzione delle loro rendite, la cui totalità ascende a franchi 12345678,90.

Si cercherà la contribuzione per franco, e quindi si opererà come qui sopra, per trovare quella che è relativa ad ogni rendita.

Regola di società, o di ripartimento composto.

90. Dividere una gratificazione di 9595^{fr},95^{c} fra due impiegati, in ragione dei loro stipendii, e dell' anzianità del loro servizio. Si suppongono al primo 6000^{fr} di stipendio e 15 anni di servizio, ed al secondo 5000 di stipendio e 20 anni di servizio.

Bisogna moltiplicare gli stipendii per il tempo del servizio, e fare quindi una regola di ripartimento semplice. Così in questo esempio, la parte del primo sarà proporzionale a $6000 \times 15 = 90000$, e quella del secondo a $5000 \times 20 = 100000$; si troverà 5050^{fr},50^{c} per il secondo, e 4545^{fr},45^{c} per il primo.

Regola del tre composta.

91. 300 operaii lavorando 8 ore per giorno, hanno fatto in 50 giorni, una trincea di 200^{m} di lunghezza, 6^{m} di larghezza, e 2^{m} di profondità. Quanti operaii ci bisognerebbero, lavorando 10 ore al giorno per 40 giorni, a fare una trincea di 180^{m} di lunghezza, 8 di larghezza, e 2,5 di profondità?

Per ricondurre questo quesito ad una regola del tre semplice, bisogna ridurre a 4 i 12 numeri che vi sono impiegati, il che s' eseguisce in questa guisa: Sia x il numero d' operaii che si cerca; 300 operaii lavorando 8 ore al giorno per 50 giorni, sono equivalenti a $300 \times 8 \times 50 = 120000$ operaii che lavorano in un' ora. Parimente x operaii occupati 10 ore per giorno, per 40 giorni, possono essere rimpiazzati da $x \times 10 \times 40 = 400\,x$ operaii, impiegati per un' ora. Da un altro canto una trincea di 200^{m} di lunghezza, 6^{m} di larghezza, e 2^{m} di profondità, è equivalente a $200 \times 6 \times 2 = 2400$ metri cubi; ed una trincea di 180^{m} di lunghezza, d' 8^{m} di larghezza, e 2,5 di profondità, è equivalente a $180 \times 8 \times 2{,}5 = 3600^{m}$ cubi. Così il quesito primitivo è equivalente a questo:

120000 operaii hanno fatto 2400 metri cubi, e $400x$ operaii hanno fatto 3600^m cubi. Le opere essendo proporzionali agli operaii, si ha questa proporzione:

$$2400 : 3600 :: 120000 : 400x;$$

dunque $$400x = \frac{3600 \times 120000}{2400} = 180000;$$

ed $$x = \frac{180000}{400} = 450.$$

Bisognerebbero dunque 450 operaii.

Invece di fare la proporzione si sarebbe potuto impiegare l'equazione $\frac{2400}{120000} = \frac{3600}{400x}$ fra le due espressioni equivalenti a ciò che ogni operajo fa ogni ora.

Quest'operazione è un poco più difficile a spiegare ed a comprendersi, quando intieramente s'interdice l'uso dei segni algebrici.

DELLE PROGRESSIONI.

92. Si distinguono comunemente due specie di progressioni: quella che dicesi *Aritmetica* o per *differenza*, e quella che dicesi *Geometrica* o per *quoziente*. Nella prima la differenza e nella seconda il quoziente di due termini consecutivi sono delle quantità costanti.

Della progressione Aritmetica.

93. Secondo la definizione precedente, i numeri naturali, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ec. formano una progressione aritmetica la cui differenza è uno. Il modo adottato per indicarle è il seguente:

$$\div\ 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6.\ \text{ec.}$$

Si pronunzia; zero sta ad 1 come 1 a 2, come 2 a 3, come 3 a 4, come ec. Inseguito impiegheremo anche la virgola per separare i termini da questa progressione.

Si avrebbe parimente una progressione aritmetica, se gl'istessi numeri si scrivessero in un ordine inverso,

$$\div\ 6 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1 \,.\, 0.$$

La prima progressione è detta *crescente*, e la seconda *decrescente*.

È facile vedere che prendendo 3 termini di seguito, avremo sempre una proporzione aritmetica continua.

Digitized by Google

PROBLEMA GENERALE. Indichiamo il primo termine d'una progressione aritmetica per a, la differenza per d, il numero dei termini per n, l'ultimo per u, e la somma per s. Trovare due di questi cinque termini quando si conoscono gli altri tre.

Soluzione. Si ha generalmente,

$$u = a + d(n-1) \text{ ed } s = (a+u) \times \frac{n}{2}.$$

Infatti sia una progressione aritmetica crescente,

$$\div a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, \ldots u$$

È chiaro che il coefficiente di d in un termine qualunque, è sempre minore d'una unità dell'ordine di questo termine: questo coefficiente è dunque $(n-1)$ nell' n^{mo}, dunque quest' n^{mo} termine ossia $u = a + d(n-1)$.

Per dimostrare l'equazione $s = \frac{(a+u)\times n}{2}$, procederemo come segue.

Progressione data;

$$\div a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots. a+d(n-2), a+d(n-1):$$

Progressione inversa:

$$\div a+d(n-1), a+d(n-2) \ldots.. a+d, a:$$

Somma delle due progressioni,

$$\div 2a+d(n-1), 2a+d(n-1), 2a+d(n-1) \ldots.. 2a+d(n-1), 2a+d(n-1);$$

ossia $\div a+u, a+u, a+u \ldots.. a+u, a+u;$

Somma dei termini di quest' ultima progressione,

$$2s = (a+u) \times n:$$

Somma dei termini della prima progressione,

$$s = \frac{(a+u)\times n}{2}.$$

Spiegazione. S' aggiungono insieme, termine per termine, le due prime progressioni per formare la terza. Tutti i termini di quest' ultima si trovano necessariamente eguali fra loro, perchè la differenza d è addittiva nella prima e sottrattiva nella seconda. Ogni termine della terza sarà espresso da $a+u$, la somma di tutti i termini lo sarà da $(a+u)n$; ma questa somma è evidentemente doppia di quella dei termini della prima progressione; dunque

$s = \frac{(a+u)\times n}{2}$, indicando con s la somma dei termini della prima progressione.

Le due equazioni fondamentali,

$$u = a + d(n-1);\ \text{ed}\ s = \frac{(a+u)\times n}{2};$$

si traducono così in linguaggio ordinario: *L'ultimo termine d'una progressione aritmetica crescente è eguale al primo termine, più la differenza moltiplicata per il numero dei termini meno uno; e la somma dei termini è eguale alla metà del prodotto della somma degli estremi, moltiplicata per il numero dei termini.*

Le due equazioni primitive.

$$u = a + d(n-1)\ \text{ed}\ s = \frac{(a+u)\times n}{2},$$

avendo tre quantità comuni a, u ed n, se ne possono derivare altre tre equazioni, successivamente eliminando a, u ed n. Quest' equazioni derivate sono,

$$2s = 2un - dn(n-1);$$
$$2s = 2an + dn(n-1),$$
$$2ds = u^2 - a^2 + ad + ud.$$

Così si avranno cinque equazioni fra le cinque quantità, a, d, n, u, ed s, combinate quattro a quattro.

94. Se si risolve ogni equazione, rapporto ad ognuna delle quattro quantità che ci sono impiegate, ne risulteranno 20 formule che risolveranno il problema proposto.

Tavola di queste venti formule.

Noti.			Trovare.	Formule.
n	d	u	. . . .	$a = u - d(n-1)$;
n	u	s	. . . .	$a = \frac{2s - un}{n}$;
			a	
n	d	s	. . . .	$a = \frac{2s - dn(n-1)}{2n}$;
u	d	s	. . . .	$a = \frac{d \pm \sqrt{(2u+d)^2 - 8ds}}{2}$.

Seguito della Tavola.

Noti.			Trovare.	Formule.
a	d	n	. . . .	$u = a + d(n-1)$;
a	n	s	. . . .	$u = \frac{2s - an}{n}$;
d	n	s	u	$u = \frac{2s + dn(n-1)}{2n}$;
a	d	s	. . . .	$u = -\frac{d \pm \sqrt{(2a-d)^2 + 8ds}}{2}$.
a	u	d	. . . .	$n = 1 + \frac{u-a}{d}$;
a	u	s	. . . .	$n = \frac{2s}{a+u}$;
a	d	s	n	$n = \frac{d-2a \pm \sqrt{(2a-d)^2 + 8ds}}{2d}$;
u	d	s	. . . .	$n = \frac{2u + d \pm \sqrt{(2u+d)^2 - 8ds}}{2d}$.
a	u	n	. . . .	$d = \frac{u-a}{n-1}$;
a	u	s	. . . .	$d = \frac{u^2 - a^2}{2s - a - u}$;
a	n	s	d	$d = \frac{2s - 2an}{n(n-1)}$;
u	n	s	. . . .	$d = \frac{2un - 2s}{n(n-1)}$;
a	u	n	. . . .	$s = \frac{(a+u) \times n}{2}$;
a	u	d	. . . .	$s = \frac{(a+u)(u-a+d)}{2d}$;
a	n	d	s	$s = \frac{2an + da(n-1)}{2}$;
u	n	d	. . . .	$s = \frac{2un - dn(n-1)}{2}$;

Digitized by Google

I principianti faranno bene a cercare queste stesse formule e verificarle, applicandole ad una progressione cognita in tutte le sue parti. Sia per esempio la progressione, $\div 1 . 3 . 5 . 7$, in cui $a = 1, d = 2, n = 4, u = 7$ ed $s = 16$.

Si vuole verificare la formula un poco complicata,

$$n = \frac{d - 2a \pm \sqrt{(2a - d)^2 + 8ds}}{2d};$$

si avrà $n = \frac{2 - 2 \pm \sqrt{(2-2)^2 + 8 \times 2 \times 16}}{2 \times 2} = \pm \frac{16}{4} = \pm 4.$

Il valore $+ 4$ soddisfa solo all'equazione ed alla progressione, ed il valore $- 4$ non soddisfa che all'equazione.

95. Se si divide in parti eguali il tempo che un corpo impiega a cadere liberamente, e senza provare resistenza per parte dell'aria, gli spazii percorsi, nel tempo di quest'istanti eguali, formano secondo i fisici, una progressione aritmetica. Questa progressione è d'altronde rimarchevolissima, in ciò che la differenza che vi regna, è doppia del primo termine; per conseguenza avremo,

$$d = 2a; \text{ed } s = \frac{2an + dn(n-1)}{2} = \frac{2an + 2an(n-1)}{2}$$

$$= \frac{2an + 2an^2 - 2an}{2} = an^2.$$

Così in questa progressione, la somma dei termini è eguale al primo termine, moltiplicato per il quadrato del numero dei termini; e per conseguenza lo spazio percorso da un corpo, dall'origine del suo moto, è eguale allo spazio percorso nel primo istante, moltiplicato per il quadrato del numero degl'istanti. Si è osservato che il primo spazio $a = 4^m,904$ se si conta il tempo in secondi. Perciò passiamo alle applicazioni.

Applicazioni.

I. Problema. Una bomba ha impiegato tanto tempo a salire quanto a scendere, ed il suo moto ha durato 10 secondi. A quale altezza si è ella inalzata?

Soluzione. Si trova $s = 4^m,904 \times 5^2 = 4,904 \times 25 = 122^m,600$ (63tese). Si fa $n = 5$ poichè la bomba ha dovuto cadere per 5 secondi.

II. PROBLEMA. La cima del Panteon a Parigi è alta circa $78^{m},464$ (241 piede $\frac{1}{2}$) al disopra del pavimento di quest'edifizio. Quanti secondi impiegherebbe un corpo grave a cadere da quest'altezza?

Soluzione. L'equazione $s=an^2$ diviene $78^{m},464=4^{m},904\, n^2$.

Dunque $$n^2=\frac{78464}{4904}=16, \text{ ed } n=4.$$

Così il corpo metterebbe 4 secondi a cadere.

III. PROBLEMA. Un uomo è incaricato d'annaffiare uno ad uno 100 alberi posti sulla stessa linea, a 5 metri l'uno dall'altro; prende l'acqua a 10 metri dal primo albero, sul prolungamento della linea degli alberi. Quanta strada farà all'andare ed al tornare?

Soluzione. Farà 20 metri per il primo albero, 30 per il secondo, 40 per il terzo, ec.

Gli spazii percorsi formano dunque una progressione aritmetica, il cui primo termine è 20, la differenza 10, ed il numero dei termini 100. Avremo la somma colla formula:

$$s=\frac{2\,an+dn\,(n-1)}{2}=\frac{2.20.100+1000\times 99}{2}=\frac{4000+99000}{2}$$

$$=51500^{\text{met.}}=5^{\text{miriam.}},15.$$

Circa 12 leghe di 25 al grado di latitudine.

IV. PROBLEMA. Un uomo tanto all'andare che al ritorno, ha percorso metri 13750 per annaffiare uno ad uno n alberi, posti sopra una medesima linea, a 5 metri l'uno dall'altro. Si sa di più che ha fatto 520 metri per l'ultimo albero. Si domanda quanti alberi ci sono, ed a qual distanza dal primo albero è la sorgente che si suppone sulla linea degli alberi?

Soluzione. Non prendiamo che la strada percorsa all'andare o al tornare.

Avremo $$\frac{13750}{2}=6875^{m} \text{ per tutti gli alberi,}$$

e $$\frac{520}{2}=260 \text{ per l'ultimo albero.}$$

Allora gli spazii percorsi formano una progressione aritmetica, la cui differenza è $d=5$, l'ultimo termine $u=260$, e la somma dei termini $s=6875$. Il numero dei termini sarà,

$$n = \frac{2u + d \mp \sqrt{(2u + d)^2 - 8ds}}{2d} = \frac{525 \mp 25}{10};$$

così $n = \frac{525 - 25}{10} = 50$ ed $n = \frac{525 + 25}{10} = 55$.

Se si prende $n = 50$ si trova;

$$a = u - d\,(n - 1) = 260 - 5.49 = 260 - 245 = 15.$$

Così c'erano 50 alberi, e l'acqua era a 15 metri dal primo albero.

Il secondo valore di n non può risolvere il problema, poichè se si prende $n = 55$, si trova $a = -10$. Ma questo stesso valore di n, come pure il primo, risolverebbero il seguente quesito. In una progressione aritmetica decrescente, il maggior termine $u = 260$, la differenza $d = 5$, e la somma dei termini $s = 6875$. Infatti nel caso d'$n = 50$ la progressione sarebbe,

$$\div\ 260 . 255 . 250 \ldots\ldots 20 . 15.$$

e nel caso $n = 55$, la progressione diverrebbe;

$$\div\ 260 . 255 . 250 \ldots\ldots 20 . 15 . 10 . 5 . 0 . -5 . -10.$$

progressione ove come nella prima $u = 260$, $d = 5$, ed $s = 6875$; perchè la somma dei 5 termini 10, 5, 0, -5, -10 si riduce a zero.

Ritorneremo alla progressione aritmetica quando parleremo delle piramidi delle palle.

Delle progressioni geometriche o per quozienti.

96. In questa specie di progressione, il quoziente dei due termini consecutivi divisi l'uno per l'altro, è sempre lo stesso. Così la serie dei numeri 1, 2, 4, 8, 16, in cui ogni termine è la metà del seguente, e quella ancora 15625, 3125, 625, 125, 25, 5, 1, in cui ogni termine è il quinto del precedente, formano due progressioni geometriche, la prima crescente e la seconda decrescente. Si scrive.

$$\div\!\div\ 1 : 2 : 4 : 8 : 16, \text{ per la prima,}$$

e $\div\!\div\ 15625 : 3125 : 625 : 125 : 25 : 5 : 1$ per la seconda. Si pronunzia 1 sta a 2 come 2 sta a 4, come 4 sta ad 8, ec.

97. Problema generale. Conoscendo tre di queste cinque quantità, il minor termine a, il maggiore u, il numero

dei termini n, la somma dei termini s, ed il quoziente q, trovare gli altri due.

Soluzione. Supponghiamo la progressione crescente, e $q > 1$; avremo,

$$1.° \ u = aq^{n-1}; \ 2.° \ s = \frac{uq - a}{q - 1}.$$

Infatti sia la progressione crescente qualunque

$$\because a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 : aq^5 : aq^6 \ldots\ldots : u.$$

Si vede evidentemente che in ogni termine, l'esponente di q è minore d'una unità dell'ordine di questo termine: così quest'esponente dev'essere $n - 1$ nell'n^{mo} termine, e per conseguenza $u = aq^{n-1}$. Ciò ch'era necessario di dimostrare.

Dall'equazione $s = a + aq + aq^2 + aq^3 \ldots\ldots$
$+ aq^{n-3} + aq^{n-2} + aq^{n-1}$, ossia u,

si deduce prima

$$s - a = aq + aq^2 + aq^3 \ldots\ldots + aq^{n-2} + aq^{n-1}$$
$$= q(a + aq + aq^2 \ldots\ldots + aq^{n-2}) = q \ (s - u).$$

Dall' equazione $s - a = q \times (s - u)$ se ne deduce successivamente,

$$s - a = sq - uq; \ s - sq = a - uq; \ s(1 - q) = a - uq;$$

$$s = \frac{a - uq}{1 - q} \text{ o piuttosto } s = \frac{uq - a}{q - 1},$$

perchè si suppone $q > 1$. Ecco dunque la seconda equazione dimostrata.

Se si eliminano successivamente ciascuna delle tre quantità a, u, q, comuni alle due equazioni primitive,

$$u = aq^{n-1} \text{ ed } s = \frac{uq - a}{q - 1},$$

avremo queste tre equazioni derivate:

$$aq^n - a + s - sq = 0;$$
$$uq^n - u + sq^{n-1} - sq^n = 0;$$
ed $$u(s - u)^{n-1} - a(s - a)^{n-1} = 0.$$

Avremo dunque in tutto cinque equazioni, che racchiudono ognuna quattro delle cinque quantità a, u, q, n, s. La risoluzione di queste cinque equazioni fornirà 20 formule, e queste 20 formule risolveranno il problema proposto. Ecco queste formule, impiegandoci per quanto è possibile, i logaritmi dei quali parleremo in seguito.

Digitized by Google

Noti.	Trovare.	Formule.
u q n	a	$a = \frac{u}{q^{n-1}}$; log. $a =$ log. $u - (n-1) \times$ log. q.
u q s		$a = uq + s - sq$; log. $(s - a) =$ log. $q +$ log. $(s - u)$.
q n s		$a = \frac{s(q-1)}{q^n - 1}$; log. $a =$ log. $s +$ log. $(q-1)$ − log. $(q^n - 1)$.
u n s		$a \times (s - a)^{n-1} - u \times (s - u)^{n-1} = 0$. *
a q n	u	$u = aq^{n-1}$; log. $u =$ log. $a + (n-1) \times$ log. q.
a q s		$u = \frac{sq - s + a}{q}$; log. $(s - u) =$ log. $(s - a)$ − log. q.
q n s		$u = \frac{sq^{n-1}(q-1)}{q^n - 1}$; log. $u =$ log. $s + (n-1) \times$ log. $q +$ log. $(q-1)$ − log. $(q^n - 1)$.
a n s		$u(s - u)^{n-1} - a(s-a)^{n-1} = 0$. *
a u n	q	$q = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$; log. $q = \frac{\text{log. } u - \text{log. } a}{n-1}$.
a u s		$q = \frac{s-a}{s-u}$; log. $q =$ log. $(s - a)$ − log. $(s - u)$.
a n s		$aq^n - sq + s - a = 0$. *
u n s		$q^n - \frac{sq^{n-1}}{s-u} + \frac{u}{s-u} = 0$; *

Noti.	Trovare.	Formule.
$a \quad u \quad q$	. . . .	$n = 1 + \frac{\log. u - \log. a}{\log. q}$;
$a \quad u \quad s$	. . . .	$n = 1 + \frac{\log. u - \log. a}{\log.(s-a) - \log.(s-u)}$;
$a \quad q \quad s$	n	$n = \frac{\log.(a + sq - s) - \log. a}{\log. q}$;
$u \quad q \quad s$	. . . .	$n = 1 + \frac{\log. u - \log.(s - sq + uq)}{\log. q}$;
$a \quad u \quad q$	. . . .	$s = \frac{uq - a}{q - 1}$; $\log. s = \log.(uq - a) - \log.(q - 1)$.
$a \quad u \quad n$	s	$s = \frac{u\sqrt[n-1]{u} - a\sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{u} - \sqrt[n-1]{a}}$ Si calcoleranno separatamente; 1.° $u\sqrt[n-1]{u}$; 2.° $a\sqrt[n-1]{a}$; 3.° $\sqrt[n-1]{u}$; 4.° $\sqrt[n-1]{a}$, colle formule particolari. 1.° $\log. u\sqrt[n-1]{u} = \log. u + \frac{\log. u}{n-1}$; 2.° $\log. a\sqrt[n-1]{a} = \log. a + \frac{\log. a}{n-1}$; 3.° $\log. \sqrt[n-1]{u} = \frac{\log. u}{n-1}$; 4.° $\log. \sqrt[n-1]{a} = \frac{\log. a}{n-1}$.
$a \quad n \quad q$	. . . .	$s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$; $\log. s = \log. a + \log.(q^n - 1) - \log.(q - 1)$.
$u \quad n \quad q$	. . . .	$s = \frac{u(q^n - 1)}{q^{n-1}(q - 1)}$; $\log. s = \log. u + \log.(q^n - 1) - \log.(q - 1) - \log. q^{n-1}$.

Digitized by Google

Queste formule si applicano egualmente alle progressioni decrescenti, basta allora riguardare a come il termine minore, u come il maggiore, q come il quoziente del maggiore dei due termini consecutivi diviso per il minore.

Gli alunni faranno bene ad esercitarsi a verificare queste formule, applicandole ad una progressione di cui tutte le parti sono note. Sia per esempio la progressione.

$$\div\!\div\; 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 ;$$

in cui $a = 1$, $q = 2$, $u = 64$, $n = 7$, ed $s = 127$.

Se si vogliono verificare le formule,

$$a = uq + s - sq \; ; \; u = \frac{sq^{n-1}(q-1)}{q^n - 1} \; ;$$

finalmente $$s = \frac{u\sqrt[n-1]{u} - a\sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{u} - \sqrt[n-1]{a}} .$$

Avremo successivamente,

$$a = 2 . 64 + 127 - 2 . 127 = 128 - 127 = 1 \; ;$$

$$u = \frac{127.2^6}{27-1} = \frac{127.64}{128-1} = 61 \; ;$$

finalmente $$s = \frac{64\sqrt[6]{61} - \sqrt[6]{1}}{\sqrt[6]{64} - \sqrt[6]{1}} = \frac{128-1}{2-1} = 127.$$

Risultamenti conformi alle supposizioni che si sono fatte.

Fra le formule della tavola precedente ce ne sono pertanto quattro che gli alunni non potranno in generale verificare, perchè questi elementi non permettono d'esporre dei metodi per risolvere l'equazioni numeriche de gradi superiori al secondo (1).

Applicazioni.

98. Non si può quasi parlare di progressioni geometriche senza rammentare il problema seguente :

PROBLEMA. L'inventore del giuoco degli scacchi avendo avuto la scelta della ricompensa che desiderava, domandò un granello di grano per la prima casa dello scacchiere,

(1) Queste quattro formule sono indicate nella tavola dal segno. *

2 granelli per la seconda, 4 granelli per la terza, 8 granelli per la quarta, e così di seguito, raddoppiando sempre fino alla sessantaquattresima ed ultima casa. Quanti granelli domandava egli?

Il numero dei granelli del grano è evidentemente la somma dei termini d'una progressione ove si conosce $a=1$, $q=2$, $n=64$, avremo dunque questa somma mediante la formula,

$$s=\frac{a(q^n-1)}{q-1}=\frac{2^{64}-1}{2-1}=2^{64}-1=18446744073709551615.$$

Questo calcolo consiste a togliere 1 dalla sessantaquattresima potenza del 2. Questa sessantaquattresima potenza può formarsi in questo modo. Moltiplicate 1.° la quarta potenza per 16 o per se stessa; 2.° il resultamento di questa prima moltiplicazione per se stesso o l'ottava potenza per se stessa; 3.° il risultamento di questa seconda moltiplicazione per se stesso, o la sedicesima potenza per se stessa; 4.° il risultamento della terza moltiplicazione per se stesso, o la trentaduesima potenza per se stessa, ciò che darà la sessantaquattresima potenza del 2.

Dei curiosi hanno trovato che ci volevano circa 261000 granelli di grano per formare il peso d'un miriagrammo (circa libbre 20); l'inventore avrebbe dunque avuto 70677180359040 miriagrammi, e valutando questo peso a 2 franchi, ciò avrebbe fatto 141354360718080 franchi, somma di denaro molto superiore ad ogni tesoro nel mondo.

99. Riprendiamo la formula,

$$s=\frac{u(q^n-1)}{q^{n-1}(q-1)}=\frac{uq}{q-1}\left(1-\frac{1}{q^n}\right).$$

Se ne facciamo l'applicazione alle progressioni decrescenti all'infinito, essa si ridurrà ad $s=\frac{uq}{q-1}$; infatti il numero n dei termini essendo infinito, la frazione $\frac{1}{q^n}$ sparisce, poichè il suo denominatore q^n diviene lui stesso maggiore d'ogni quantità assegnabile.

Per fare uso di questa formula rammenteremo quello che si è detto per applicare alle progressioni decrescenti le formule delle progressioni crescenti. Vedasi l'osservazione che immediatamente segue la tavola di queste formule.

Si troverà successivamente per mezzo della formula precedente.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\ldots\ldots+0=\frac{\frac{1}{2}\times 2}{2-1}=1;$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}\ldots\ldots+0=\frac{\frac{1}{3}\times 3}{3-1}=\frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}\ldots\ldots+0=\frac{\frac{1}{4}\times 4}{4-1}=\frac{1}{3};$$

Si rappresenta col zero il minor termine, perchè dev'essere minore d'ogni numero finito; altrimenti la progressione potrebbe essere continuata al di là.

Le frazioni decimali periodiche presentano un esempio rimarcabile delle progressioni decrescenti all'infinito. Infatti l'espressione di questo genere, 0, 81 81 81 ec.

$$=\frac{81}{100}+\frac{81}{10000}+\frac{81}{1000000}+\text{ec.}$$

$$=\frac{81}{100}+\frac{81}{\overline{100}^2}+\frac{81}{\overline{100}^3}+\text{ec.}$$

$$=\frac{\frac{81}{100}\cdot 100}{100-1}=\frac{81}{99}=\frac{9}{11};$$

Perchè in questa progressione $u=\frac{81}{100}$ e $q=100$.

Parimente 0, 135 135 135, ec.

$$=\frac{135}{1000}+\frac{135}{\overline{1000}^2}+\frac{135}{\overline{1000}^3}+\text{ec.}=\frac{\frac{135}{1000}\cdot 1000}{1000-1}=\frac{135}{999}=\frac{5}{37}.$$

Similmente 0,571428 571428 571428, ec.

$$=\frac{571428}{1000000}+\frac{571428}{(1000000)^2}+\frac{571428}{(1000000)^3}+\frac{571428}{(1000000)^4}+\text{ec.}$$

$$=\frac{\frac{571428}{1000000}\cdot 1000000}{1000000-1}=\frac{571428}{999999}=\frac{4}{7}.$$

Da questi esempii si vede che nella frazione ordinaria, equivalente alla frazione decimale periodica, il numeratore è formato dalle cifre del periodo, e che il denominatore è composto di tanti 9 quante cifre ci sono nel periodo.

Se il periodo decimale non comincia colle prime cifre decimali, si farà in questa guisa:

Sia l'espressione 0,416666 ec. avremo,

$$0{,}416666,\ \text{ec.}=\frac{1}{100}\,41{,}6666,\ \text{ec.}$$

Digitized by Google

$$=\frac{1}{100}\cdot\left(41+\frac{6}{10}+\frac{6}{(10)^2}+\frac{6}{(10)^3}+\frac{6}{(10)^4}+\text{ec.}\right)$$

$$=\frac{1}{100}\cdot\left(41+\frac{6}{9}\right)=\frac{375}{900}=\frac{5}{12}.$$

Parimente avremo 0, 1 36 36 36, ec.

$$=\frac{1}{10}\cdot 1,\ 36\ 36\ 36,\ \text{ec.}$$

$$=\frac{1}{10}\left(1+\frac{36}{100}+\frac{36}{(100)^2}+\frac{36}{(100)^3}+\text{ec.}\right)$$

$$=\frac{1}{10}\left(1+\frac{36}{99}\right)=\frac{1}{10}\cdot\frac{135}{99}=\frac{135}{990}=\frac{3}{22}.$$

Il periodo principia alla terza cifra nel primo esempio ed alla seconda cifra del secondo esempio. Si è avanzata la virgola di due posti nel primo esempio, e d' un posto nel secondo. Ma siccome ciò portava a moltiplicare per 100 nel primo esempio, e per 10 nel secondo, si è nel tempo stesso indicata la divisione per 100 nel primo caso, e per 10 nell' altro; compenso che ha conservato il valore dell' espressioni primitive.

Si trarrebbe da ciò la regola prescritta in Aritmetica al n.° 70 per ritrovare la frazione ordinaria che ha potuto produrre una frazione periodica.

Dei logaritmi.

100. Neper, inventore dei logaritmi, ha dovuto concepirne l' idea, paragonando la progressione aritmetica alla progressione geometrica.

I *logaritmi* sono dei numeri artificiali che s' impiegano invece di numeri veri, per semplicizzare i calcoli. Infatti, col mezzo loro, si riconduce la moltiplicazione all' addizione, la divisione alla sottrazione, la formazione delle potenze alla moltiplicazione, e l' estrazione delle radici alla divisione. Può esserci un' infinità di sistemi di logaritmi, fra i quali n' esistono due che sono in uso. Ci limiteremo prima ai logaritmi volgari o di *Briggs*, e ne stabiliremo la teoria sul paragone delle due progressioni: questo processo sembra il più semplice ed il più elementare.

101. Sia la progressione geometrica,

$$\div\!\div\ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000,\ \text{ec.}$$

e la progressione aritmetica.

$\div$ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6, ec.

Prenderemo i termini di questa per i logaritmi dei termini corrispondenti della prima. Così log. 1 = 0, log. 10 = 1, log. 100 = 2, log. 1000 = 3, log. 10000 = 4, log. 100000 = 5, log. 1000000 = 6, ec. Si vede che il logaritmo ha tante unità quanti zeri ci sono dopo l'unità nel numero corrispondente.

La progressione geometrica, siccome si vede, è quella delle potenze del 10; e la progressione aritmetica è quella dei numeri naturali. Sono quelle che col loro paragone rendono i calcoli più semplici.

102. Per concepire i logaritmi dei numeri che non sono delle potenze del 10 come 2, 3, ec. si suppone d'avere inserito un grandissimo numero di medii geometrici fra due termini consecutivi nella progressione geometrica, ed un simil numero di medii aritmetici fra i termini consecutivi e corrispondenti della progressione aritmetica. Andando da 1 a 10 nella progressione geometrica, si avranno dei medii geometrici ch'equivarranno l'uno a 2, l'altro a 3, un altro a 4, ec. se non esattamente, in un modo almeno moltissimo approssimato, poichè la differenza fra due medii consecutivi è tanto piccola quanto si vuole: questi medii geometrici equivalendo a 2, a 3, a 4, ec. avranno per logaritmi i medii aritmetici corrispondenti.

Per esempio se si valutano i logaritmi ad un centomillesimo circa, come nelle tavole che portano il nome di Lalande, si è supposto avere inserito 99999 medii tanto geometrici che aritmetici, e la differenza fra i due medii aritmetici consecutivi è $\frac{1}{100000}$, mentre che il rapporto dei due medii geometrici consecutivi è espresso da $\sqrt[100000]{10}$.

Si vede che questo rapporto si trova colla formula precedente $q = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$ in cui, $n = 100001$, $u = 10$, $a = 1$.

La differenza fra due termini consecutivi della progressione aritmetica corrispondente, si trova colla formula $d = \frac{u-a}{n-1}$ in cui, $u = 1$, $a = 0$.

Indicheremo altri processi praticabili per calcolare realmente i logaritmi dei numeri che non sono potenze esatte del 10.

Digitized by Google

103. Vediamo adesso come, coll' ajuto dei logaritmi, si riducono siccome l' abbiamo enunciato, la moltiplicazione all' addizione, la divisione alla sottrazione, ec.

Concepiamo che si sia inserito fra i termini consecutivi dell' una e dell' altra progressione, quel grandissimo numero di medii geometrici ed aritmetici dei quali abbiamo parlato. Sia q il rapporto dei due termini consecutivi della nuova progressione geometrica, y un termine qualunque della stessa progressione, il cui ordine o posto è n; sia parimente d la differenza di due termini consecutivi della nuova progressione aritmetica, ed x un termine qualunque il cui posto è n; per conseguenza $x = \log. y$.

104. Si avrà (97) $y = q^{n-1}$,

e (93 e 94) $x = d(n-1)$.

Avremo parimente $y' = q^{n'-1}$, ed $x' = d(n'-1)$;

y' è un termine il cui posto è n' nella progressione geometrica; x' è il termine corrispondente, o dello stesso posto, nella progressione aritmetica. Così,

$$x' = \log. y'.$$

Se moltiplichiamo y per y', avremo,

$$y \times y' = q^{n-1} \times q^{n'-1} = q^{n+n'-2}.$$

poichè gli esponenti sono supposti dei numeri interi. Il prodotto $q^{n+n'-2}$ è un termine della progressione geometrica, e ci occupa un posto marcato da $n + n' - 1$: così il suo logaritmo, che occupa lo stesso posto nella progressione aritmetica, dev'essere espresso da $d(n + n' - 2)$. Adesso $(x + x') = d(n + n' - 2)$. Dunque $\log. y \,.\, y' = x + x' = \log. y + \log. y'$. Così il logaritmo d' un prodotto di due fattori, è eguale alla somma dei logaritmi di questi due fattori.

Se il prodotto racchiude tre fattori, come $y \,.\, y' \,.\, y''$ sia $y \,.\, y' = z$, avremo $y \,.\, y' \,.\, y'' = zy''$ e $\log. y \,.\, y' \,.\, y'' = \log. zy'' = \log. z + \log. y'' = \log. y + \log. y' + \log. y''$ a causa di $\log. z = \log. y + \log. y'$. Così il logaritmo d' un prodotto di tre fattori, è eguale alla somma dei logaritmi di questi tre fattori. È facile estendere questa regola ad un numero qualunque di fattori. Dunque in generale, *il logaritmo d'un prodotto, è eguale alla somma dei logaritmi dei fattori di questo prodotto.* Dunque, la moltiplicazione, mediante i logaritmi, si riduce all'addizione.

105. Sia $q = \frac{a}{b}$, dunque $bq = a$, e log. $bq =$ log. b + log. $q =$ log. a. Finalmente log. $q =$ log. a — log. b, cioè, il *logaritmo d'un quoziente è eguale al logaritmo del dividendo*, *meno il logaritmo del divisore*. Conseguentemente la divisione si riduce alla sottrazione.

106. Sia $y = a^2$; dunque log. $y =$ log. $a +$ log. $a = 2$ log. a. Sia ancora $y = a^3 = aaa$; dunque log. $y =$ log. a + log. a + log. $a = 3$ log. a. Così il logaritmo d'un quadrato d'un numero, vale due volte quello di questo numero; ed il logaritmo del cubo d'un numero qualunque, vale tre volte il logaritmo di questo numero.

È facile di generalizzare questa regola, e conchiuderne che il *logaritmo d'una potenza qualunque d'un numero*, *si trova moltiplicando il logaritmo di questo numero per l'esponente della potenza*; regola che in questo modo può tradursi in algebra. Sia $y = a^n$, se ne deduce log. $y = n$ log. a. Così la formazione delle potenze si riduce alla moltiplicazione.

107. Sia $y^2 = a$, e per conseguenza $y = \sqrt{a}$; avremo

log. y^2 ossia 2 log. $y =$ log. a, e log. $y = \frac{1}{2}$ log. a;

cioè il logaritmo della radice quadrata d'un numero a è eguale alla metà del logaritmo di questo numero.

Sia di più $y^3 = a$, e per conseguenza $y = \sqrt[3]{a}$,

dunque log. y^3, oppure 3 log. $y =$ log. a,

$$\text{e} \qquad \text{log. } y = \tfrac{1}{3} \text{ log. } a = \frac{\text{log. } a}{3}.$$

cioè il logaritmo della radice cubica d'un numero è eguale al terzo del logaritmo di questo numero. In generale,

sia $y^n = a$ e per conseguenza $y = \sqrt[n]{a}$;

dunque log. y^n ossia n log. $y = a$, e log. $y = \frac{\text{log. } a}{n}$;

dunque in generale il *logaritmo della radice qualunque d'un numero si trova dividendo il logaritmo di questo numero per l'esponente della radice*. Così l'estrazione delle radici il cui calcolo è penoso, e qualche volta quasi impraticabile per le regole ordinarie, si riduce ad una semplice divisione, col soccorso dei logaritmi.

108. Dopo avér date le regole che convengono al caso ove separatamente s'impiegano la moltiplicazione, la di-

visione, la formazione delle potenze e l'estrazione delle radici, vediamo quelle che se ne possono dedurre, quando queste operazioni di calcolo sono mischiate insieme.

109. Sia la proporzione geometrica,

$$a : b :: c : x, \text{ se ne deduce } x = \frac{bc}{a};$$

e $$\log. x = \log. b + \log. c - \log. a.$$

Dunque il *logaritmo d'un estremo d'una proporzione geometrica, è eguale alla somma dei logaritmi dei medii, meno il logaritmo dell'estremo cognito.*

Sia la proporzione,

$$a : b :: x : c, \text{ d'onde } x = \frac{ac}{b};$$

e $$\log. x = \log. a + \log. c - \log. b.$$

Cioè il *logaritmo d'un medio è eguale alla somma dei logaritmi degli estremi, meno il logaritmo del medio cognito.*

110. Sia la proporzione continua,

$$a : x :: x : b, \text{ d' onde } x^2 = ab;$$

e $$\log. x = \frac{\log. a + \log. b}{2}.$$

Così il *logaritmo del termine medio, in una proporzione continua è eguale alla metà della somma dei logaritmi degli estremi.*

111. Sia $x = a + \frac{b}{c}$ ossia $x = \frac{ac + b}{c}$;

dunque $$\log. x = \log. (ac + b) - \log. c.$$

Dunque per *avere il logaritmo d'un intero unito ad una frazione, bisogna ridurre l'intero in frazione, riguardare il nuovo numeratore come un dividendo, e il denominatore come un divisore, ed applicare la regola prescritta per la divisione.* Non bisogna confondere log. $(ac + b)$ con log. ac + log. b, essendo quest' ultimo quello del prodotto della quantità ac moltiplicata per b; invece che il primo è quello della somma di queste due quantità; per impiegarlo, bisogna valutare queste due quantità separatamente in numero, aggiungerle insieme, e prendere il logaritmo della loro somma.

112. La tavola delle formule delle progressioni geometriche, offre degli esempii complicati abbastanza dell' uso dei logaritmi: vi rimandiamo perciò il lettore. Ne riporteremo soltanto due esempii.

Sia l'equazione,

$$uq^n - u = sq^n - sq^{n-1}.$$

Per risolverla rapporto ad n, si passeranno nel primo membro tutti i termini ove si trova n, e nel secondo quelli ove non è n; avremo,

$uq^n - sq^n + sq^{n-1} = u$; quindi $q^{n-1}(uq - sq + s) = u$;

poscia $$q^{n-1} = \frac{u}{uq + s - sq};$$

finalmente $(n-1)\log. q = \log. u - \log. (uq - sq + s)$;

ed $$n = 1 + \frac{\log. u - \log. (uq - sq + s)}{\log. q}.$$

Sia pure l'equazione,

$$a(s-a)^{n-1} = u(s-u)^{n-1},$$

che si vuol risolvere rapporto ad n; avremo

$$\frac{(s-a)^{n-1}}{(s-u)^{n-1}} = \frac{u}{a}, \text{ ossia } \left(\frac{s-a}{s-u}\right)^{n-1} = \frac{u}{a}.$$

Passando dai numeri ai logaritmi avremo,

$$(n-1)\log. \frac{(s-a)}{(s-u)} = \log. u - \log. a;$$

finalmente $$n - 1 = \frac{\log. u - \log. a}{\log. (s-a) - \log. (s-u)}.$$

Sarà bene esercitarsi a cercare gli altri risultamenti dalla tavola.

Idea del modo di calcolare i logaritmi volgari.

113. Le progressioni fondamentali danno immediatamente i logaritmi dei numeri 1, 10, 100, 1000, ec. o delle potenze esatte del 10. La ricerca dei logaritmi degli altri numeri si riduce a quella dei logaritmi dei numeri primi, 2, 3, 5, 7, ec.; poichè i logaritmi dei numeri che sono formati dalla moltiplicazione dei numeri primi, s'ottengono aggiungendo insieme i logaritmi di questi numeri primi. Vediamo come potremo calcolare il logaritmo d'un

numero primo, quello di 5 per esempio. Non si può fare uso della supposizione dei medii geometrici ed aritmetici inseriti in numero immenso fra i termini consecutivi delle due progressioni fondamentali, perchè il calcolo sarebbe in questo modo impraticabile; ecco però un altro processo.

114. Cerchiamo un medio geometrico fra 1 e 10, ed un medio aritmetico fra 0 ed 1: sarà questi il logaritmo del primo. Si avrà indicando per x questo medio geometrico,

$$x = \sqrt{10} = 3{,}162277, \text{ e } \log. x = \frac{\log. 10}{2} = 0{,}50000000.$$

Cerchiamo nuovamente un medio geometrico fra 10 e 3,162277, avremo con questo mezzo $\sqrt{31{,}62277} = 5{,}6234113$. Il logaritmo corrispondente è eguale alla metà della somma dei logaritmi di 10, e 3,162277: questo logaritmo eguaglia 0,7500000. Si continua l'operazione cercando sempre un medio proporzionale fra due medii già calcolati, l'uno immediatamente maggiore e l'altro immediatamente minore di 5. Uno si ferma allorchè si giunge ad un medio che non differisce da 5, d'una parte decimale d'un ordine dato; del sesto, per esempio, se uno si limita a quest'approssimazione. Si calcolano nel tempo istesso i logaritmi corrispondenti; cosa facilissima, poichè il logaritmo d'un medio qualunque è eguale alla metà della somma dei logaritmi de' due numeri fra i quali si è calcolato questo medio.

Così si è trovato che il $\log. 5 = 0{,}6989700$:
se ne conchiuderà il $\log. 2 = \log. 10 - \log. 5 = 0{,}3010300$.

Coi log. 2 e log. 5, si calcoleranno i logaritmi dei numeri che sono una potenza del 2, o una potenza del 5, o il prodotto d'una potenza di 2 moltiplicata per una potenza di 5. Così,

$$\log. 4 = 2 \log. 2 = 0{,}6020600;$$
$$\log. 25 = 2 \log. 5 = 1{,}3979400.$$
$$\text{e} \quad \log. 40 = \log. 5 + \log. 8 = 1{,}6020600.$$

Se si calcolano nello stesso modo i logaritmi di tutti i numeri primi, avremo facilmente i logaritmi degli altri numeri, che sono o delle potenze, o dei prodotti delle potenze dei numeri primi. Per verità questo metodo condurrebbe a calcoli immensi; ma fortunatamente questi calcoli sono fatti, e ne sono risultate le tavole dei logaritmi. Indicheremo quelle che sono più in uso.

Digitized by Google

Delle tavole dei logaritmi.

115. Le tavole di Callet meritano la preferenza per la loro estensione e per il modo in cui ci sono disposti i logaritmi volgari. Racchiudono, inoltre, i logaritmi delle linee trigonometriche, secondo la divisione sessagesimale, e secondo la divisione centesimale. Ci si trovano pure i logaritmi di Neper, il cui uso è utile nell'analisi trascendente.

Indicheremo quindi le tavole di Borda delle quali M. Delambre è stato l'editore: racchiudono esse, 1.° i logaritmi volgari, colla medesima estensione e la medesima disposizione di quelle di Callet; 2.° i logaritmi delle linee trigonometriche secondo la divisione centesimale. In mancanza di queste tavole grandi si possono impiegare quelle in 12° a sei figure, pubblicate da M. Plauzoles, che racchiudono i logaritmi volgari per tutti i numeri dall' 1 fino al 21750, ed i logaritmi trigonometrici per l' antica e nuova divisione del quadrante.

Le tavole di Lalande hanno pure il vantaggio d' essere portabili, ma non danno i logaritmi volgari dei numeri naturali che dall' 1 al 10000.

Crediamo opportuno di rimandare a queste diverse tavole, per imparare il modo di servirsene. Supporremo che si abbiano sotto gli occhi quelle di Callet; altrimenti sarebbe quasi impossibile il comprendere quello che siamo per esporre.

116. Ci sono in tutti i logaritmi due parti ben distinte, la *caratteristica* e la *frazione decimale* ossia *mantissa*. La caratteristica è il numero intero che precede la frazione decimale; così in 1,3979400 = log. 25, la caratteristica è 1, e la frazione decimale o mantissa, è 0,3979400.

Callet e Borda hanno soppresso e con ragione, la caratteristica dei logaritmi volgari. Questa soppressione lungi dal portare degl' inconvenienti, è vantaggiosissima, siccome questi autori lo fanno vedere. È facile infatti il ritrovare la caratteristica dei logaritmi d' un numero dato, se è intero, o s' è composto d' un intero e d' una frazione decimale. Nel primo caso, la caratteristica ha tante unità quante cifre meno una sono nel numero dato; nel secondo caso, la caratteristica ha tante unità quante cifre meno una ci sono alla sinistra della virgola che separa il numero intero dalla frazione decimale. Così la caratteristica è 4 nel logaritmo 12345; 3 nel log. 1234,5; 2 nel log. 123,45; 1 nel log. 12,345; 0 nel log. 1,2345.

Infatti a causa di log. 1 = 0, e di log. 10 = 1, ne segue che il logaritmo d' uno qualunque dei numeri 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 è compreso fra 0 ed 1; egli ha dunque 0 per caratteristica. Si rimarcherà facilmente che i logaritmi sono compresi fra 1 e 2, da log. 10 = 1, fino a log. 100 = 2; fra 2 e 3, da log. 100 = 2 fino a log. 1000 = 3; fra 3 e 4 da log. 1000 = 3 a log. 10000 = 4; ec. Per conseguenza la caratteristica del logaritmo è 1, 2, 3, 4, ec. secondo che il numero ha 2, 3, 4, ec. cifre. Così, in generale, la caratteristica d'un numero intero ha tante unità quante cifre meno una ha questo numero.

Sia log. 12345 = 4,0914911;
se ne conchiuderà log. 1234,5 = log. $\frac{12345}{10}$ = log. 12345 — log. 10 = 3,0914911;
quindi log. 123,45 = log. $\frac{12345}{100}$ = log. 12345 — log. 100 = 2,0914911;
poi log. 12,345 = log. $\frac{12345}{1000}$ = log. 12345 — log. 1000 = 1,0914911;
finalmente log. 1,2345 = log. $\frac{12345}{10000}$ = log. 12345 — log. 10000 = 0,0914911;
a causa di log. 10 = 1, log. 100 = 2, log. 1000 = 3, log. 10000 = 4.

In tutti questi risultamenti, si vede che la caratteristica ha tante unità, quante cifre meno una ha il numero proposto avanti le frazioni decimali.

117. Se si moltiplica, o se si divide un numero qualunque per una potenza di 10, la frazione decimale nel logaritmo del prodotto, o in quello del quoziente, sarà la stessa che nel logaritmo del numero primitivo. Così, log. 12345 = 4,0914911; log. 12345 × 10 = 5,0914911; e log. $\frac{12345}{10}$ = 3,0914911.

Infatti il logaritmo d' una potenza di 10, avendo sempre zero per frazione decimale, l' addizione o la sottrazione d' un simile logaritmo, non può nulla cangiare alla frazione decimale del logaritmo del numero che si è moltiplicato o diviso per una potenza di 10.

Da ciò pure ne segue che la frazione decimale del logaritmo d' un numero composto d'interi e di parti decimali, è la stessa come se non ci fossero parti decimali. Così, log. 12345 = 4,0914911, e log. 12,345 = 1,0914911: logaritmi nei quali la frazione decimale è la medesima.

118. Queste osservazioni serviranno a facilitare l' uso dei logaritmi delle frazioni. Queste specie di logaritmi si presentano naturalmente sotto la forma di numeri negativi;

infatti si può considerare una frazione come un quoziente, il numeratore come un dividendo, ed il denominatore come un divisore. Così il logaritmo d'una frazione è eguale a quello del numeratore meno quello del denominatore: esso è dunque negativo tutte le volte che il denominatore è maggiore del numeratore. Per esempio,

$\log. \frac{1}{2} = \log. 1 - \log. 2 = 0 - 0{,}3010300 = -0{,}3010300$, e $\log. \frac{2}{3} = \log. 2 - \log. 3 = -(\log. 3 - \log. 2) = -(0{,}4771213 - 0{,}3010300) = -0{,}1760913$.

Per evitare questi logaritmi negativi, che producono sempre qualche inconveniente, si aumenta di 10 unità la caratteristica del logaritmo del numeratore; in questa guisa il logaritmo del denominatore può sottrarsi da quello del numeratore così modificato. Per esempio si ha,

$$\log. \tfrac{1}{2} = 9{,}6989700 \text{ ; e } \log. \tfrac{2}{3} = 9{,}8239087.$$

Per verità si commette un errore enorme, tanto sul logaritmo che è troppo grande di 10 unità alla caratteristica, che sul valore del numero corrispondente che è moltiplicato per la decima potenza di 10, ossia per 10000000000; ma si corregge questo doppio errore sopprimendo una diecina alla caratteristica del logaritmo definitivo.

Per la stessa ragione,

$$\log. \tfrac{1}{4} = 9{,}3979400; \ \log. \tfrac{1}{8} = 9{,}0969100.$$

Ora $\quad \frac{1}{2} = (\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}; \ \frac{1}{2} = (\frac{1}{8})^{\frac{1}{3}}$;

se dunque si vuole il logaritmo del $\frac{1}{2}$ per mezzo di quello del $\frac{1}{4}$; bisognerà dopo avere aggiunto una diecina alla caratteristica del logaritmo del $\frac{1}{4}$, prendere la metà di questo logaritmo. Se si avesse il logaritmo dell' $\frac{1}{8}$ e che quello si volesse del $\frac{1}{2}$, s' aggiungerebbero prima due diecine al primo logaritmo, quindi si dividerebbe per tre. In generale, per prendere una radice qualunque d' una frazione, bisogna avanti di dividere il suo logaritmo per l' indice della radice proposta, aumentare la sua caratteristica di tante diecine meno una, quante unità ci sono nell' indice di questa radice.

APPLICAZIONI.

119. I logaritmi sono stati specialmente inventati per facilitare i calcoli della trigonometria. Rimandiamo a questa parte della geometria, per le applicazioni di questo genere: eccone intanto alcune altre.

Digitized by Google

1.° Si sono pagati franchi 67890 per la paga di 12345 uomini; quanto si deve sborsare per quella di 14814?

Si avrà la proporzione,

$$12345 : 14814 :: 67890 : x;$$

d'onde si deduce

log. x = log. 67890 + log. 14814 — log. 12345 = 4,9109870 = log. 81468.

Prospetto del calcolo.

Log. 67890	= 4,8318058
Log. 14814	= 4,1706723
Somma.	= 9,0024781
Togliendo log. 12345. .	= 4,0914911
Differenza o log. x. . .	= 4,9109870

Questo logaritmo è quello di 81468; così x = 81468.

2.° Si sono pagati franchi 987,65 per 43^{m},21^{c} di panno, quanto si deve pagare per 345^{m}68^{c}?

Avremo la proporzione,

$$43,21 : 345,68 :: 987,65 : x:$$

poscia log. x = log. 987,65 + log. 345,68 — log. 43,21 = 3,8976931 = log. 7901,2.

Prospetto del calcolo.

Log. 987,65.	= 2,9946031
Log. 345,68.	= 2,5386743
Somma	= 5,5332774
Togliendo log. 43,21. . .	= 1,6355843
Differenza o log. x. . . .	= 3,8976931

Questo logaritmo è quello di 7901,2; dunque x = 7901,2, ed è quello che si deve pagare.

3.° Conoscendo il peso ed il diametro d'una palla da cannone, trovare il diametro d'un' altra palla il cui peso è dato. Per esempio trovare il diametro della palla detta da 24 (peso antico) sapendo che quella della palla da 36 è di 168^{milli}, circa 74 $\frac{4}{5}$ linee.

Si dimostra in geometria che le sfere sono proporzionali ai cubi dei loro diametri; ed in fisica, che i volumi stanno

fra loro come i pesi, quando i corpi sono omogenei: da ciò ne segue che i pesi delle palle stanno fra loro, come i cubi dei loro diametri.

Indichiamo per x il diametro cercato, avremo questa proporzione.

$$x^3 : 168^3 :: 24 : 36 :: 2 : 3.$$

si ha dunque $x^3 = \frac{(168)^3 \times 2}{3}$;

quindi $3 \log. x = 3 \log. 168 + \log. 2 - \log. 3$:
finalmente $\log. x = 2{,}1666122 = \log. 146{,}76$.
Il diametro della palla da 24 è dunque di 147 millimetri circa.

4.° Secondo gli astronomi i quadrati dei tempi che due pianeti impiegano a fare le loro rivoluzioni attorno al Sole, stanno fra loro come i cubi delle loro distanze a questo medesimo astro: secondo ciò, sapendo che la rivoluzione della Terra attorno al Sole è di 365gui, 5ore, 48', 51", e che quella di Giove è di 4330gni, 14ore, 39', 2", trovare il rapporto delle distanze di questi pianeti al Sole.

Riduchiamo prima in secondi le rivoluzioni date: avremo per la Terra 31556931 secondi, e 374164742 per Giove. Indichiamo il primo numero per a, il secondo per b; per 1 la distanza dalla Terra al Sole, e per x quella da Giove allo stesso astro: avremo la proporzione,

$$x^3 : 1^3 :: b^2 : a^2:$$

quindi $3 \log. x = 2 \log. b - 2 \log. a$:

perchè $\log. 1 = 0$. Così,

$$\log. x = \frac{2 \log. b - 2 \log. a}{3} = 0{,}71597880 = \log. 5{,}1997.$$

Dunque la distanza da Giove al Sole sta a quella della Terra al medesimo astro, come 52 : 10.

Prospetto del calcolo.

$+ 2 \log. b$.	=	17,14612573
$- 2 \log. a$.	=	14,99818934
Differenza o $3 \log. x$	=	2,14793639
$\log. x$	=	0,7159788.

Quest' ultimo logaritmo è quello di 5,1997.

5.° Dopo avere estratto un litro di vino da una botte, si riempie con un litro d'acqua; se ne leva un secondo

Digitized by Google

che si rimpiazza nella stessa guisa, e così di seguito. Come determinare il numero dei litri che bisognerebbe levare da questo mescuglio, affinchè il vino rimanente nella botte, fosse la metà, o il terzo, o in generale la parte n di quello che v'era in principio?

Prendiamo un esempio particolare. Supponghiamo che ci siano 100 litri, e che debba rimanere la metà del vino nella botte. Diminuendo il vino d'un centesimo ogni volta, i numeri ch'esprimono le quantità di vino che la botte contiene successivamente, formano una progressione geometrica decrescente, il cui primo termine è 100, il secondo 99, l'ultimo 50, e la ragione $\frac{99}{100}$. Questa progressione si cangia in una crescente, il cui primo termine è eguale 50, l'ultimo 100 e la ragione $\frac{100}{99}$. Il numero dei termini di questa progressione è maggiore d'un' unità di quello delle operazioni. Sia a il primo termine, u l'ultimo, q il rapporto, ed n il numero dei termini, avremo successivamente,

$$u = aq^{n-1};\ \text{quindi}\ q^{n-1} = \frac{u}{a};$$

poscia $$(n-1)\ \log.\ q = \log.\ u - \log.\ a;$$

finalmente $$n-1 = \frac{\log.\ u - \log.\ a}{\log.\ q} = \frac{\log.\ 100 - \log.\ 50}{\log.\ 100 - \log.\ 99}$$

$$= \frac{0{,}3010300}{0{,}0043648} = 68{,}9.$$

Dunque bisognerebbe estrarre circa 69 litri.

6.° Si è posto un capitale di 10000 franchi al 5 per 100 di frutto all'anno; in capo a quanto tempo sarebbe egli raddoppiato, compresoci il capitale ed i frutti del frutto?

Ogni anno il capitale aumenta d'$^1/_{20}$. Così i numeri che indicano quello che è successivamente dovuto al momento del collocamento, quindi dopo la prima, la seconda, la terza ed n^{ma} annata, fanno una progressione geometrica crescente, di cui il primo termine $a = 10000$,

il secondo $= 10000 + \frac{10000}{20} = 10500$

l'ultimo termine $u = 20000$,

la ragione $q = \frac{10500}{10000} = \frac{21}{20} = 1{,}05$

Di più il numero dei termini della progressione è maggiore d'una unità del numero degli anni. Così quest' ul-

Digitized by Google

timo numero sarà $n-1$, se il primo è n. La teoria delle progressioni dà,

$$u=aq^{n-1}; \text{ quindi } q^{n-1}=\frac{u}{a},$$

poscia $(n-1)\log. q=\log. u-\log. a.$

finalmente, $n-1=\frac{\log. u-\log. a}{\log. q}=\frac{\log. 20000-\log. 10000}{\log. 1{,}05}$

$$=\frac{0{,}3010300}{0{,}0211893}=14{,}2.$$

Il capitale sarebbe dunque raddoppiato in poco più di 14 anni, e più che raddoppiato in 15 anni.

7.° Una persona prende a frutto 10000 franchi al 6 per 100 l'anno, a condizione di potere rimborsare il capitale pagando ogni anno una somma di 1000 franchi; per quanto tempo bisognerà pagare questo prestito annuale, ond' estinguere capitale e frutti alla volta.

Rappresentiamo per a il capitale, il frutto d'un franco per r, ed il prestito annuo per b. In capo ad un anno gli sarà dovuto,

$$a+ar-b=a(1+r)-b=a'$$

In capo a due anni il debito sarà,

$$a'+a'r-b=a'(1+r)-b=a(1+r)^2$$
$$-b(1+r)-b=a''.$$

In capo a tre anni questo debito si ridurrà,

$$a''+a''r-b=a''(1+r)-b=a(1+r)^3$$
$$-b(1+r)^2-b(1+r)-b=a'''.$$

In capo a quattro anni questo debito sarà,

$$a'''+a'''r-b=a'''(1+r)-b=a(1+r)^4$$
$$-b(1+r)^3-b(1+r)^2-b(1+r)-b.$$

Finalmente dopo n anni, esso sarà soltanto ridotto,

$$a(1+r)^n-b(1+r)^{n-1}-b(1+r)^{n-2}-b(1+r)^{n-3}\ldots$$
$$-b(1+r)-b.$$
$$=a(1+r)^n-b\times[(1+r)^{n-1}+(1+r)^{n-2}+(1+r)^{n-3}\ldots$$
$$+(1+r)+1]$$
$$=a(1+r)^n-b[1+(1+r)+(1+r)^2\ldots+(1+r)^{n-1}]\ldots$$

$$= a\,(1+r)^n - b\,\frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

perchè la quantità che moltiplica b, è la somma dei termini d' una progressione geometrica, il cui primo termine è 1, la ragione $1+r$, ed il numero dei termini n.

Per esprimere che il debito è nullo, avremo,

$$a\,(1+r)^n - b\,\frac{(1+r)^n - 1}{r} = 0;$$

quindi $$(1+r)^n\left(a - \frac{b}{r}\right) = -\frac{b}{r},$$

ossia $$(1+r)^n\left(\frac{b-ar}{r}\right) = \frac{b}{r};$$

poscia n log. $(1+r) =$ log. b — log. $(b - ar)$.

finalmente $$n = \frac{\text{log. } b - \text{log. } (b - ar)}{\text{log. } (1+r)}.$$

Per l' applicazione sia $a = 10000$, $b = 1000$;

$r = \frac{6}{100}$, $ar = 600$, $b - ar = 400$, $1 + r = 1{,}06$;

avremo,

$$n = \frac{\text{log. } 1000 - \text{log. } 400}{\text{log. } 1{,}06} = \frac{0{,}3979400}{0{,}0253059} = 15{,}7.$$

Dunque bisognerebbe pagare il prestito annuo per circa 16 anni.

Senza l' uso dei logaritmi quest' ultimi problemi sarebbero quasi insolubili.

Terminiamo qui, perchè i limiti di questo compendio non ci permettono di maggiormente estenderci sulla parte elementare dei logaritmi.

SUPPLIMENTO

A QUESTI ELEMENTI D'ALGEBRA.

120. Cominceremo questo supplimento dalla ricerca della formula che dà la somma dei quadrati dei termini d'una progressione aritmetica, formula utile per calcolare i mucchii ossia le piramidi delle palle.

Sia una progressione aritmetica crescente, i cui termini sono $a, b, c \ldots\ldots t, u$; sia d la somma di due termini consecutivi, n il numero dei termini, s la somma dei termini, s_1, quella dei loro quadrati, ed s_3 quella dei loro cubi. Avremo,

$$b = a + d, c = b + d \ldots\ldots u = t + d;$$

quindi,
$$b^3 = (a + d)^3 = a^3 + 3a^2d + 3ad^2 + d^3,$$
$$c^3 = (b + d)^3 = b^3 + 3b^2d + 3bd^2 + d^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u^3 = (t + d)^3 = t^3 + 3t^2d + 3td^2 + d^3.$$

Aggiunghiamo insieme quest' equazioni termine a termine, avremo,

$$s_3 - a^3 = s_3 - u^3 + 3d\,(s_2 - u^2) + 3d^2\,(s_1 - u) + d^3\,(n - 1),$$

oppure $a^3 = u^3 - 3d\,(s_2 - u^2) - 3d^2\,(s_1 - u) - d^3\,(n - 1)$, equazioni da cui si rileva,

$$s_2 = \frac{3du^2 + u^3 - a^3 - 3d^2\,(s_1 - u) - d^3\,(n - 1)}{3d}.$$

Ma $u = a + d\,(n - 1)$, ed $s_1 = (2a + dn - d)\frac{n}{2}$;

sarà dunque facile ottenere s_2, o la somma dei quadrati dei termini, quando si conosceranno a, d ed n.

Nel caso particolare che la progressione sia quella dei numeri naturali $1, 2, 3, 4 \ldots\ldots n$, si fa $a = 1$,

Digitized by Google

$d = 1$; per conseguenza $u = n$, ed $s_1 = \frac{n(n+1)}{2}$: nello stesso caso si trova,

$$s_2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Tale è la formula che dà la somma dei quadrati dei numeri naturali, dal quadrato di 1 fino a quello d' n.

Altra maniera di trovare la formula $s_2 = \frac{n(n+1)(2n+1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

Sia

$s_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \ldots\ldots\ldots + (n-1)^2 + n^2$,

ed $s'_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \ \ldots\ldots + (n-1)^2$.

Se ne cenchiuderà $s_2 - s'_2 = n^2$. Sia di più,

$$s_2 = an^3 + bn^2 + cn + d;$$

essendo i coefficienti a, b, c, d, indipendenti dai valori particolari d' n. Così avremo,

$s'_2 = a(n-1)^3 + b(n-1)^2 + c(n-1) + d$;

quindi $s_2 - s'_2 = 3an^2 - 3an + 2bn + a - b + c = n^2$

oppure $n^2(3a-1) + n(2b-3a) + a - b + c = 0$.

Per esprimere la condizione che i coefficienti a, b, c, d, sono indipendenti dai valori particolari d'n, bisogna separatamente eguagliare a zero, ognuno dei termini dell'equazione precedente, ciò che dà, 1.° $3a - 1 = 0$ ed $a = \frac{1}{3}$; 2.° $2b - 3a = 0$, e $b = \frac{1}{2}$; 3.° $a - b + c = 0$, e $c = \frac{1}{6}$.

Così, $$s_2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} + d.$$

Per determinare d, sia $n = 1$. In questo caso in cui $s_2 = 1$ si trova $d = 0$. Quest'è pure il valore di d in tutti i casi possibili. Così definitivamente,

$$s_2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

formula assolutamente eguale a quella ottenuta coll'altro metodo.

Piramidi delle palle.

121. Nei parchi d' artiglieria si dispongono a mucchii denominati piramidi, le palle da cannone, le bombe, e le granate reali. Queste piramidi possono essere di tre diverse specie; piramidi a base quadrata; piramidi a base triangolare; e piramidi bislunghe, o a base rettangolare.

Della piramide a base quadrata.

122. Questa piramide è composta di strati quadrati; questi strati sono, andando dal vertice alla base, la serie dei quadrati dei numeri naturali. Così seguendo quest'ordine, si ha una palla nel primo strato, 4 nel secondo, 9 nel terzo, 16 nel quarto, 25 nel quinto, ... n^2 nel n^simo^; l' ultimo strato si chiama la *base* della piramide. La totalità delle palle è dunque la somma dei quadrati dei numeri naturali, da quello dell' 1 fino a quello d' n, indicando per n il numero degli strati; n indica pure quante palle ci sono in ogni lato della base, ed in ogni costola laterale della piramide.

Indicando con s il numero delle palle dell' intiera piramide, avremo, siccome l' abbiamo trovato,

$$s = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3};$$

impieghiamo la lettera s senza apice, perchè non c' è più equivoco, e perchè non è più necessario distinguere la somma dei quadrati da quella delle terze o delle prime potenze.

Ecco di più una tavola che potrà tener luogo di formula, se sarà estesa abbastanza, e che servirà a verificarla se è necessario.

Costole..	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12;
Strati....	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144;
Piramide	1	5	14	30	55	91	140	204	285	385	506	650;

La prima linea indica il numero degli strati, o il numero delle palle contenute in ogni costola: la seconda serie indica quante palle ci sono in ogni strato; finalmente la terza dà il numero delle palle dell' intiera piramide.

Sia $n = 10$, o supponghiamo che ci siano 10 strati: la formula dà $s = \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 385$, come nella tavola.

Della piramide a base triangolare.

123. Questa piramide si decompone in strati triangolari, andando dal vertice alla base. Ogni strato è un triangolo equilatero, eccettuato il primo, che non contiene che una sola palla. Ci sono due palle nel lato del secondo strato, 3 in quello del terzo, 4 in quello del quarto... n in quello del n^{mo}. Il numero delle palle d'uno strato qualunque, è la somma dei termini d'una progressione aritmetica il cui primo termine è 1, la differenza pure 1, ed il numero dei termini eguale a quello delle palle contenute in ogni lato dello strato. Così nel caso in cui questo lato contenga n palle, lo strato ne contiene $\frac{n^2+n}{2}$ o $\frac{1}{2}(n^2+n)$. Se n vale successivamente 1, 2, 3, 4,... n, gli strati varranno successivamente $\frac{1}{2}(1^2+1)$, $\frac{1}{2}(2^2+2)$, $\frac{1}{2}(3^2+3)$, $\frac{1}{2}(4^2+4)$, . . . $\frac{1}{2}(n^2+n)$, ed s essendo sempre la totalità delle palle della piramide, avremo,

$$s = \tfrac{1}{2}(1^2+1) + \tfrac{1}{2}(2^2+2) + \tfrac{1}{2}(3^2+3) + \tfrac{1}{2}(4^2+4)\ldots + \tfrac{1}{2}(n^2+n)$$

$$= \tfrac{1}{2}(1^2+2^2+3^2+4^2\ldots\ldots+n^2) + \tfrac{1}{2}(1+2+3+4\ldots\ldots+n).$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n^2+n}{4} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}.$$

Formiamo pure una tavola per questa piramide a base triangolare, siccome una ne abbiamo formata per la piramide a base quadrata. Sia uno strato di cui ogni lato contenga n palle: questo strato è composto d'n file, che formano la medesima progressione aritmetica dei numeri naturali 1, 2, 3, 4,..... n. Così il numero delle palle di questo strato è espresso da $1+2+3+4\ldots+n$. Questo numero è dunque 1 per il primo strato,

$1+2=3$ per il secondo,

$1+2+3=6$ per il terzo,

$1+2+3+4=10$ per il quarto,

$1+2+3+4+\ldots.+n$ per l'n^{simo}.

Ogni strato si forma dunque mediante la successiva addizione dei numeri naturali. In conseguenza di ciò eccone la tavola:

Costole...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	ec.
Strati.....	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	ec.
Piramide.	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	ec.

La prima linea indica quanti strati ci sono nella piramide ossia quante palle ci sono in ogni costola della suddetta. La seconda linea indica il numero delle palle contenute nei diversi strati. Si vede adunque che ci sarebbero 55 palle nel decimo strato. Questa seconda linea si forma aggiungendo successivamente i numeri naturali, dall' 1 fino a quello che indica l' ordine dello strato. La terza linea si forma successivamente aggiungendo tutti i numeri contenuti nella seconda; così ognuno di questi termini esprime necessariamente la totalità delle palle d' un' intiera piramide, poichè è la somma degli strati di questa piramide. Così ci sono 220 palle in una piramide il cui numero degli strati è 10. La formula $s = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$, mettendo 10 per n diviene $s = \frac{10 \times 11 \times 12}{6} = 220$, risultamento perfettamente d' accordo con quello della tavola.

Piramide bislunga la cui base è un rettangolo.

124. Gli strati di questa piramide sono rettangoli; andando dal vertice alla base, il primo strato contiene una sola fila di palle. Sia m il numero delle palle di questo strato; ci sono nel secondo due file di palle ed $m+1$ palle per ogni fila; 3 file nel terzo strato, ed $m+2$ palle per ciascuna fila; 4 file nel quarto strato, ed $m+3$ palle per ogni fila; finalmente n file nell' n^{simo} strato, ed $m+n-1$ palle per ogni fila. In conseguenza di quest' analisi, il numero delle palle dell' n^{simo} strato, sarà $n(m+n-1) = mn + n^2 - n$. Se in quest' espressione si mettono per n, successivamente, 1, 2, 3, 4,... n, il numero delle palle sarà,

$$\begin{array}{l} m + 1^2 - 1 \text{ per il } 1.^\circ \text{ strato.} \\ 2m + 2^2 - 2 \ldots\ldots 2.^\circ \\ 3m + 3^2 - 3 \ldots\ldots 3.^\circ \\ 4m + 4^2 - 4 \ldots\ldots 4.^\circ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ nm + n^2 - n \ldots\ldots n^{simo}. \end{array}$$

Digitized by Google

Sia sempre s la somma degli strati, avremo,

$$s = m\ (1 + 2 + 3 + 4 \ldots + n)$$
$$+ (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \ldots + n^2)$$
$$- (1 + 2 + 3 + 4 \ldots + n).$$
$$= m \times \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}$$
$$= \frac{n(n+1)}{2} \times \left(m + \frac{2n+1}{3} - 1\right)$$
$$= \frac{n(n+1)(3m+2n-2)}{6}.$$

Si è sostituito $\frac{n(n+1)}{2}$ per $1+2+3+\ldots+n$, e $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ per $1^2+2^2+3^2+4^2\ldots+n^2$.

Non si può fare la tavola di questa piramide, che dando un valore arbitrario al primo strato m: sia dunque $m = 10$, avremo la tavola seguente:

Numero degli strati.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	ec.
Valore degli strati.	10	22	36	52	70	90	112	136	162	190	ec.
Piramide.	10	32	68	120	190	280	392	528	690	880	ec.

La prima linea marca il numero degli strati della piramide, e quello delle palle d' ogni costola laterale. Questa medesima linea indica parimente l' ordine degli strati in una data piramide. La seconda linea indica il numero delle palle contenute nei diversi strati dei quali la piramide è composta. Questa seconda linea si forma colla formula $n\ (m + n - 1)$ precedentemente spiegata, e nella quale bisogna supporre $m = 10$, e dare per valore ad n successivamente, i numeri naturali $1, 2, 3, 4, \ldots 10$. La terza linea si calcola aggiungendo insieme i termini della seconda. Questa terza linea essendo così composta delle somme degli strati, dà il numero delle palle delle piramidi corrispondenti. Così il decimo termine 880, indica che ci sono 880 palle in una piramide bislunga composta di 10 strati. La formula $s = \frac{n(n+1)(3m+2n-2)}{6}$, mettendoci 10 per m, e 10 per n, diviene $s = \frac{10 \times 11 \times 48}{6}$ $= 880$, risultamento che combina con quello della tavola.

125. Se la piramide non fosse intera si completerebbe col pensiero. Si calcolerebbe separatamente la piramide

intiera, e la piramide che è bisognato aggiungere per completare la piramide tronca: la differenza delle due piramidi darebbe il valore della ricercata.

ESEMPIO.

Sia una piramide a base quadrata, composta di 4 strati, e la cui base ha 8 palle per lato; è facile vedere che l'intiera piramide avrebbe 8 strati, e ch'essa conterrebbe $\frac{8 \times 9 \times 17}{6} = 204$ palle. Tolghiamone $\frac{4 \times 5 \times 9}{6} = 30$ palle per i quattro strati che mancano, il resto 174 esprime il numero delle palle della piramide troncata.

Sia una piramide troncata a base triangolare, composta di 5 strati, e la cui base ha 8 palle per ciascun lato; la piramide intiera avrebbe 8 strati, e conterrebbe $\frac{8 \times 9 \times 10}{6} = 120$ palle. Tolghiamone $\frac{3 \times 4 \times 5}{6} = 10$ palle per i 3 strati che mancano; il resto 110 palle è la piramide troncata. Sia finalmente una piramide bislunga, composta di 6 strati, e la cui base ha 15 palle sopra un lato, e 10 sull' altro; ci sarebbero 10 strati, e $\frac{10 \times 11 \times 36}{6} = 660$ palle nella piramide intera. Se ne levano $\frac{4 \times 5 \times 24}{6} = 80$ palle per la piramide soppressa, il resto 580 sarà la piramide troncata.

In questa valutazione, il fattore 36 è dato dal fattore $3m + 2n - 2$ della formula precedente. Ora il lato $15 = m + n - 1$: dunque $m = 15 - 10 + 1 = 6$. Similmente il fattore 24 nella piramide soppressa $= 3 \times 6 + 2 \times 4 - 2$.

Se si volesse trovare il numero degli strati d'una piramide a base quadrata, quando si conosce bene quante palle contiene l'intiera piramide, si può ottenerlo senza calcolo mediante una tavola sufficientemente estesa. Perciò si cerca nella terza linea il numero delle palle della piramide: il numero che gli corrisponde nella prima linea indica quanti strati ci sono nella piramide. Così si vede che la piramide deve avere 12 strati, se ci sono 650 palle nella piramide.

Si può anche risolvere lo stesso problema mediante la formula $s = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$, nella quale si conosce s, e si cerca n. Si avrebbe per verità da risolvere un' equazione di terzo grado, ma invece di ricorrere ai metodi comuni che

Digitized by Google

non abbiamo d' altronde potuto esporre in questo compendio d' algebra, basta cercare la radice cubica del maggior cubo contenuto in $3s$. Questa radice cubica sarà il valore di n, se s appartiene ad una piramide completa. Infatti dall' equazione precedente se ne deduce,

$$3s = n^3 + \frac{3n^2}{2} + \frac{1}{2}n,$$

ciò che dà $\quad 3s > n^3$, e $3s < (n+1)^3$

ossia $\quad n < \sqrt[3]{3s}$, ed $n + 1 > \sqrt[3]{3s}$.

n è dunque la radice cubica del maggior cubo contenuto in $3s$, Bisogna rammentarsi che $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$; si ha dunque,

$$3s \text{ ossia } n^3 + \frac{3n^2}{2} + \frac{1}{2}n < (n+1)^3,$$

siccome l' abbiamo supposto.

Se si tratta della piramide a base triangolare; a causa di $s = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6}$, si ha

$$6s = n^3 + 3n^2 + 2n,$$

ciò che dà $\quad 6s > n^3$ ed $6s < (n+1)^3$.

n è dunque la radice cubica del maggior cubo contenuto in $6s$.

In quanto alla piramide bislunga, siccome c' entrano tre quantità diverse nella sua equazione, $s = \frac{n(n+1)(3m+2n-2)}{6}$; è d' uopo conoscere due di queste tre quantità onde determinarne la terza.

Delle Combinazioni.

126. Crediamo dover parlare della teoria delle combinazioni, perchè ne faremo uso, per dimostrare la formula conosciuta sotto il nome di *Binomio di Newton*, mediante la quale trovansi i diversi termini della potenza d' un binomio, siccome in seguito vedremo.

127. Si distinguono tre specie di combinazioni. Nella prima specie si può ripetere l' istessa quantità nella medesima combinazione, e disporre le quantità in tutti i modi possibili. Tali sono le nove combinazioni aa, ab, ba, ac, ca, bb, bc, cb, cc, che s' ottengono combinando due a due le tre quantità a, b, c.

Digitized by Google

128. Nella seconda specie, si dispongono pure le quantità in tutti i modi possibili, ma non si ripete più la stessa quantità nella medesima combinazione. Tali sono le sei combinazioni ab, ba, ac, ca, bc, cb, che danno le tre quantità a, b, c, combinate due a due in questa guisa. Questa specie di combinazione chiamasi *permutazione*.

129. Nella terza specie finalmente, non solo non si ripete l'istessa quantità nella medesima combinazione, come nella prima specie, ma non s'ammettono ancora combinazioni verune composte delle medesime quantità, perquanto diversamente disposte. Tali sono le tre combinazioni ab, ac, bc, formate dalle tre quantità a, b, c, prese in questa guisa due a due. Questa terza specie è quella dei *prodotti diversi*.

Prima specie di combinazione.

130. Rappresentiamo con lettere le quantità che vogliamo combinare, ed impieghiamo indifferentemente la denominazione della lettera per quella della quantità.

Sia un numero qualunque m di lettere, avremo m combinazioni prendendole una ad una. Se si concepisce che una delle lettere, a, per esempio, sia scritta alla destra d'ognuna delle combinazioni precedenti, avremo m combinazioni di due lettere delle quali a farà parte; impiegando parimente la lettera b, otterremo m nuove combinazioni di due lettere. Lo stesso sarà dell'altre due lettere. Avremo dunque m volte m ossia m^2 per il numero delle combinazioni d'm lettere, prese due a due in questa guisa.

Adesso se si scrive successivamente ognuna dell'm lettere alla destra d'ognuna delle combinazioni di due lettere, avremo m volte altrettante combinazioni di tre lettere, quante ce ne sono di due, vale a dire mm^2 ossia m^3.

Parimente ponendo successivamente ogni lettera alla destra delle combinazioni di tre lettere, avremo m volte altrettante combinazioni di quattro lettere, quante ce ne sono di tre, cioè mm^3 ossia m^4.

Generalizzando questo ragionamento, troveremo ch'm lettere, combinate n ad n in questa guisa daranno un numero di combinazioni, rappresentato da m^n, cioè che per avere questo numero, bisogna alzare il numero m di lettere, ad una potenza indicata dal numero delle lettere impiegate in ogni combinazione. Così 4 lettere combinate

Digitized by Google

in questa guisa, danno 4 combinazioni d'una lettera, 16 di due lettere, 64 di tre lettere, ec.

Il nostro sistema di numerazione presenta un esempio ben rimarchevole di questa specie di combinazione, poichè in questa guisa ci s' impiegano le 10 cifre conosciute per esprimere tutti i numeri. Giova frattanto l'osservare, che siccome si sopprimono gli zeri che sono alla sinistra delle cifre significative, la regola si trova in difetto in tutti i casi seguenti. Per esempio si dovrebbero avere 100 numeri composti di due cifre, poichè $10^2 = 100$. Pertanto non ce ne sono che 90, cosa che accade perchè le combinazioni 00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, sono rimpiazzate nell'uso dai numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Si vedrà parimente il perchè non si hanno che 900 numeri di tre cifre, invece di 1000 che ne dovremmo avere.

Alcuni giochi di società, come la tavola reale, presentano nuovi esempii di questa prima specie di combinazione. Si potrebbe citare l'uso delle lettere dell'alfabeto per formare le parole della lingua scritta, e quello dei suoni della voce nella lingua parlata, osservando pertanto che non si ammette che un piccolissimo numero di queste combinazioni nella pratica.

Seconda specie di combinazione.

131. Sia un numero qualunque m di lettere a, b, c, d, ec. avremo sempre m combinazioni d'una lettera. Che si scriva a per esempio alla destra d'ognuna dell'altre lettere; che si scriva parimente successivamente b, c, d, ec. avremo $m-1$ combinazioni ove a occuperà il secondo posto, altrettanto per b, altrettanto per c, ec. avremo dunque $(m-1)$ volte tante combinazioni di due lettere, quante ce ne sono d'una lettera, cioè $m(m-1)$ per il numero delle combinazioni di due lettere prese nella seconda maniera.

Se si scrive a alla destra delle combinazioni di due lettere, ove non entra a, avremo $(m-1)(m-2)$ combinazioni di tre lettere nelle quali a occuperà il terzo posto verso la destra. Altrettanto ne avremo per b, per c, per d, ec. Avremo dunque $m(m-1)(m-2)$ per le combinazioni d'm lettere prese tre a tre in questa guisa.

Generalizzando, avremo $m(m-1)(m-2)\ldots\ldots$ per $(m-n+1)$ per il numero delle combinazioni d'm lettere prese n ad n.

Per esempio le quattro lettere della parola *rima* danno 4 disposizioni d' una lettera, 12 di due lettere, 24 di tre lettere e 24 di quattro lettere. I compositori di logogrifi, e soprattutto d'anagrammi, possono trarre partito da questa specie di combinazione. La lotteria ne presenta un esempio allorquando si giocano gli estratti determinati.

Terza specie di combinazione.

132. Sia sempre un numero m di lettere. Per trovare i diversi prodotti che si possono formare con queste lettere prese 1 a 1, 2 a 2, 3 a 3, 4 a 4, ... n ad n, bisogna cercare quanti prodotti equivalenti, o disposizioni, si possono formare con una, o due, o tre, o n lettere disposte in tutti i modi possibili. Prima di tutto, due lettere a e b, danno due prodotti equivalenti ab e ba per un prodotto diverso ab. Tre lettere a, b, c, danno sei disposizioni abc, acb, cab, bac, bca, cba, o prodotti equivalenti, per un prodotto diverso. Con n lettere si forma un numero di disposizioni o prodotti equivalenti rappresentati da $n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 2.1$, ossia $1.2.3\ldots. n$. Così per passare dai prodotti equivalenti ai prodotti diversi, bisogna dividere il numero delle disposizioni per 2, o 6, o 24, o generalmente per $1.2.3\ldots. n$, secondo che ci sono 1, o 2, o 3, o n lettere in ogni combinazione. Il numero dei prodotti diversi è dunque m, $\frac{m(m-1)}{1.2}$,

$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$, $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}$ . . . . .

$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-n+1)}{1.2.3.4\ldots n}$, per m lettere prese una ad una, due a due, tre a tre, o n ad n.

La lotteria presenta un esempio rimarchevole di questa terza specie di combinazione. Ci si estraggono 5 numeri sopra 90; questi 90 numeri forniscono;

1.° 90 combinazioni, prendendogli uno ad uno; ciò che dicesi *estratti*;

2.° $\frac{90.89}{1.2} = 4005$ combinazioni prendendoli due a due, che sono gli *ambi*;

3.° $\frac{90.89.88}{1.2.3} = 117480$ combinazioni, prendendoli tre a tre, che sono i *terni*;

4.° $\frac{90.89.88.87}{1.2.3.4} = 2555190$ combinazioni prendendogli quattro a quattro, che sono le *quaderne*.

5.° $\frac{90.89.88.87.86}{1.2.3.4.5} = 43949268$ combinazioni prendendogli cinque a cinque, che sono le *cinquine*.

Binomio di Newton.

133. Sia $x+a$ un binomio qualunque, ed m un numero intero; avremo; siccome siamo per dimostrarlo:

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2}$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3x^{m-3}\ldots\ldots$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2.3.4\ldots\ldots n}a^nx^{m-n}.$$

Tale è la formula nota sotto la denominazione di *formula del binomio di Newton*. Per concepirne la formazione, mettiamo per m in $(x+a)^m$ successivamente 1, 2, 3, 4, avremo per la moltiplicazione,

$$(x+a)^1 = x + a$$
$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$
$$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$
$$(x+a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$$

134. Questi risultamenti potrebbero fare scoprire la legge degli esponenti d'x, quella degli esponenti di a, e quanti termini deve avere lo sviluppo della potenza; ma sarebbe impossibile di travederci anche la legge molto più complicata dei coefficienti di tutti i termini. Questa difficoltà viene dalla riduzione, dei termini simili: adesso per evitare l'inconveniente annesso a questa riduzione, si cerchi primieramente lo sviluppo del prodotto di diversi fattori binomi, tali che $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$, procurando d'ordinare i termini rapporto ad x; avremo successivamente,
per il prodotto dei due fattori $(x+a)(x+b)$

$$\begin{array}{l} x + a \\ x + b \\ \hline x^2 + ax + ab \\ \quad + bx \end{array}$$

per il prodotto dei tre fattori $(x+a)$ $(x+b)$ $(x+c)$

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 &+ abx + abc \\ + bx^2 &+ acx \\ + cx^2 &+ bcx \end{aligned}$$

per il prodotto dei quattro fattori $(x+a)$ $(x+b)$ $(x+c)$ $(x+d)$

$$\begin{aligned} x^4 + ax^3 &+ abx^2 + abcx + abcd \\ + bx^3 &+ acx^2 + abdx \\ + cx^3 &+ adx^2 + acdx \\ + dx^3 &+ bcx^2 + bcdx \\ &+ bdx^2 \\ &+ cdx^2. \end{aligned}$$

135. Si osserva, 1.° che gli esponenti d' x vanno diminuendo d' un' unità da un termine al seguente, a principiare dal primo, ove l' esponente d' x è eguale al numero dei fattori del prodotto;

2.° che il coefficiente del primo termine è 1; quello del secondo la somma dei secondi termini dei fattori; quello del terzo termine, la somma dei prodotti di questi stessi fattori moltiplicati due a due; quello del quarto termine, la somma dei prodotti di questi stessi secondi termini moltiplicati tre a tre; finalmente, che il coefficiente dell' ultimo termine è il prodotto di questi stessi secondi termini moltiplicati tutti insieme.

136. Si può generalizzare quest' osservazione in questa guisa. Supponghiamo che il prodotto d' m fattori sia della forma seguente:

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} \ldots + Y.$$

Moltiplichiamo questo prodotto per $x + K$, avremo per risultamento,

$$\begin{aligned} x^{m+1} &+ Px^m + Qx^{m-1} + Rx^{m-2} \ldots \\ &+ Kx^m + PKx^{m-1} + QKx^{m-2} \ldots + KY. \end{aligned}$$

Così l' esponente d' x nel primo termine, è ancora eguale al numero dei fattori, numero che è qui $m + 1$. Di più il coefficiente del primo termine è sempre l' unità; quello del secondo termine $P + K$, è evidentemente la somma dei secondi termini dei fattori; quello del terzo termine $Q + PK$, è la somma dei prodotti dei medesimi

secondi termini moltiplicati due a due; quello del quarto termine R + QK, è la somma dei prodotti dei secondi termini moltiplicati tre per tre; finalmente quello dell' ultimo termine KY, è il prodotto di quest' istessi secondi termini moltiplicati tutti insieme.

La legge dei coefficienti è dunque vera per un prodotto d' $m+1$ fattori, se è vera per quello di m fattori. Adesso essa è stata verificata per quattro fattori; essa ha dunque luogo per cinque, e per una conseguenza necessaria per sei, sette,......m fattori.

137. Se nei fattori $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$, si fa $a=b=c=d$, i prodotti di questi fattori diverranno delle potenze del binomio $x+a$; allora l' esponente della potenza essendo sempre rappresentato da m, gli esponenti d' x saranno m nel primo termine, $m-1$ nel secondo, $m-2$ nel terzo..... 1 nel penultimo. Il coefficiente d' x^m sarà sempre 1; quello d' x^{m-1}, o del secondo termine, sarà a preso m volte; quello d' x^{m-2}, o del terzo termine, sarà a^2 preso tante volte quanti diversi prodotti si possono fare con m fattori, moltiplicati due a due; quello x^{m-3} o del quarto termine, sarà a^3 preso tante volte quanti prodotti diversi si possono formare con m fattori moltiplicati tre a tre, e così di seguito fino all' ultimo termine che sarà a^m.

138. Secondo la teoria delle combinazioni m fattori moltiplicati n ad n danno $\frac{m(m-1)\ (m-2)......(m-n+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3..........n}$, prodotto differente. Mettendo per n successivamente 1, 2, 3, 4,.... n, avremo $\frac{m}{1}$ per coefficiente numerico del secondo termine;

$\frac{m(m-1)}{1\ .\ 2}$ per quello del terzo:

$\frac{m(m-1)\ (m-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}$ per quello del quarto,

e generalmente $\frac{m(m-1)\ (m-2).....(m-n+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3........n}$ per quello del termine il cui ordine è $n+1$. La formula cercata è dunque definitivamente,

$$(x+a)^m = x^m + \frac{m}{1} ax^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{m-2}$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 x^{m-3} \ldots\ldots$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots\ldots\ldots n} a^n x^{n-1}.$$

Si passa da un termine al seguente in questa guisa: moltiplicate il coefficiente del primo per l' esponente d' x in questo termine, e dividete per l' ordine di questo termine; sarà questo il coefficiente del seguente. L' esponente di a vi sarà questo stesso divisore, e quello d' x vi sarà m diminuito di questo divisore. Infatti il primo termine essendo x^m;

il secondo sarà $\frac{m}{1} ax^{m-1}$, o semplicemente max^{m-1};

il terzo sarà $\frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} a^2 x^{m-2}$, ossia $\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{m-2}$;

il quarto sarà $\frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} a^3 x^{m-3}$;

o $\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 x^{m-3}$, ec.

In generale il termine dell' ordine $n+1$ essendo espresso da

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+2)(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots\ldots (n-1). \quad n} a^n x^{m-n},$$

quello dell' ordine n^{mo} sarà,

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots\ldots(m-n+2)}{1 \quad 2 \quad 3\ldots\ldots\ \ldots\ldots(n-1)} a^{n-1} x^{m-n+1}.$$

Espressioni che fanno vedere che il coefficiente del termine dell' ordine $n+1$ è eguale a quello del termine dell' ordine n, moltiplicato per $m-n+1$, e diviso per n: ma il moltiplicatore $m-n+1$ è l' esponente d' x nel termine dell' ordine n^{mo}, ed il divisore n indica quest' ordine, così la regola è generale.

139. Applichiamo questa regola allo sviluppo della 10^{ma} potenza d' $x+a$. Qui $m=10$: ci saranno undici termini, dei quali,

Digitized by Google

il primo sarà	x^{10}
il secondo	$10ax^9$
il terzo	$\frac{10}{1} \times \frac{9}{2} a^2x^8 = 45a^2 x^8$
il quarto	$45 \times \frac{8}{3} a^3x^7 = 120a^3 x^7$
il quinto	$120 \times \frac{7}{4} a^4x^6 = 210a^4 x^6$
il sesto	$210 \times \frac{6}{5} a^5x^5 = 252a^5 x^5$
il settimo	$252 \times \frac{5}{6} a^6x^4 = 210a^6 x^4$
l' ottavo	$210 \times \frac{4}{7} a^7x^3 = 120a^7 x^3$
il nono	$120 \times \frac{3}{8} a^8x^2 = 45a^8 x^2$
il decimo	$45 \times \frac{2}{9} a^9x = 10a^9 x$

finalmente l'undecimo $10 \times \frac{1}{10} a^{10}x^0 = a^{10}$,

a causa d' $x^0 = 1$. Così,

$$(x + a)^{10} = x^{10} + 10ax^9 + 45a^2 x^8 + 120a^3 x^7 + 210a^4 x^6 + 252a^5 x^5 + 210a^6 x^4 + 120a^7 x^3 + 45a^8 x^2 + 10a^9 x + a^{10}.$$

I coefficienti come si vede da quest' esempio, sono gl' istessi nei termini ove a ed x fanno un cambiamento d' esponente, ciò che ha luogo nei termini egualmente distanti dal primo e dall' ultimo. Se come nell' esempio precedente, l' esponente della potenza è pari, e per conseguenza se il numero dei termini dello sviluppo è impari, c' è un coefficiente che non è ripetuto; questo è quello del termine egualmente distante dagli estremi, e nel quale a ed x hanno l' istesso esponente, e quest'esponente è la metà di quello della potenza. Quest' osservazione sarà evidente, se si fa attenzione che lo sviluppo d' $(a + x)^m$ che dev'essere identico con quello d' $(x + a)^m$, si deduce da quest' ultimo, mettendoci a invece d' x, ed x invece di a.

140. L'istessa formula servirà a sviluppare $(x + a + b)^m$; si farà prima $a + b = c$, e si svilupperà $(x + c)$; si rimetterà quindi $a + b$ invece di c.

Sia per esempio $m = 4$ avremo ordinando i termini per rapporto ad x.

$$(x + a + b)^4 = (x + c)^4$$
$$= x^4 + 4cx^3 + 6c^2 x^2 + 4c^3 x + c^4$$
$$= x^4 + 4(a + b) x^3 + 6(a+b)^2 x^2 + 4(a + b)^3 x + (a+b)^4$$
$$= x^4 + 4(a + b) x^3 + 6(a^2 + 2ab + b^2) x^2 + 4(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) x + a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

141. Se i termini x ed a del binomio avessero dei coefficienti, s' alzerebbero questi coefficienti alle potenze indicate dagli esponenti corrispondenti d' x ed a. Così per esempio,

$$(2x+3a)^4 = 2^4x^4 + 4 \cdot 2^3 \cdot 3ax^3 + 6 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot a^2x^2 + 4 \cdot 2 \cdot 3^3 \cdot a^3x + 3^4 \cdot a^4$$
$$= 16x^4 + 96ax^3 + 216a^2x^2 + 216a^3x + 81a^4.$$

I coefficienti non si ripetono più nello sviluppo come si è osservato antecedentemente, a causa dell' ineguaglianza dei coefficienti nel binomio.

142. Se si avesse da sviluppare $(x-a)^m$, invece d' $(x+a)^m$, basterebbe cangiare il segno del secondo termine, quello del quarto, quello del sesto, ed in generale quello d'ogni termine d' ordine pari; perchè l' esponente di a è impari in ognuno di questi termini, e che ogni potenza impari d' una quantità negativa è pure negativa, o in generale $(-a)^{2k+1} = -a^{2k+1}$; $2k+1$, in cui k è intero, indica generalmente un numero impari. Così,

$$(3a-5b)^4 = 81a^4 - 540a^3b + 1350a^2b^2 - 1500ab^3 + 625b^4.$$

143. A causa di $a^nx^{m-n} = x^m \times \frac{a^n}{x^n}$, si può impiegare la formula,

$$(x+a)^m = x^m\left(1 + \frac{m}{1} \cdot \frac{a}{x} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}\frac{a^2}{x^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\frac{a^3}{x^3} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \quad \ldots \quad n}\frac{a^n}{x^n}\right),$$

invece della prima

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}a^2x^{m-2} \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \quad \ldots \quad n}a^nx^{m-n}.$$

In questa guisa, l' esponente d' x nello sviluppo, è lo stesso di quello di a. Ciò fornisce il mezzo di ridurre lo sviluppo d' $(x+a)^m$ a quello d' $(1+y)^m$, facendo $\frac{a}{x} = y$, e moltiplicando quindi per x^m ogni termine dello sviluppo d' $(1+y)^m$; infatti,

$x+a=x\left(1+\frac{a}{x}\right)$, dunque $(x+a)^m=x^m\left(1+\frac{a}{x}\right)^m$.

Altro metodo per trovare la formula del binomio di Newton.

144. A cagione d' $(x+a)=x\left(1+\frac{a}{x}\right)$, ed $(x+a)^m$ $=x^m\left(1+\frac{a}{x}\right)^m$, basta trovare lo sviluppo d' $\left(1+\frac{a}{x}\right)^m$, o quello d' $(1+y)^m$, facendo $\frac{a}{x}=y$.

Sia dunque

$$(1+y)^m=A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4+\text{, ec.} \ldots (1).$$

A, B, C, D, E, ec., sono coefficienti indipendenti da y, e solamente dipendenti dall' esponente m.

Ciò che fa congetturare che lo sviluppo d' $(1+y)^m$ sarà di questa forma, si è perchè egli è così nei casi particolari, siccome possiamo assicurarcene, facendo successivamente $m=2$, $m=3$, ec.; sviluppando quindi col metodo del n.° 67.

Avremo dunque pure,

$$(1+z)^m=A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\text{ec.};$$

d' onde si deduce,

$$\left.\begin{array}{l}(1+y)^m-(1+z)^m=B(y-z)+C(y^2-z^2)\\ \quad +D(y^3-z^3)+E(y^4-z^4)+\text{ec.}\end{array}\right\} \ldots (2)$$

Si dividano i due membri dell' equazione (2) per $y-z$ avremo,

$$\left.\begin{array}{l}\frac{(1+y)^m-(1+z)^m}{y-z}=B+C(y+z)+D(y^2+yz+z^2)\\ \quad +E(y^3+y^2z+yz^2+z^3)+\text{ec.}\end{array}\right\} \ldots (3)$$

Sia $1+y=u$, ed $(1+y)^m=u^m$; sia parimente $(1+z)=v$, ed $(1+z)^m=v^m$; dunque

$$u-v=y-z,\ \text{ed}\ \frac{(1+y)^m-(1+z)^m}{y-z}=\frac{u^m-v^m}{u-v}$$
$$=u^{m-1}+u^{m-2}v+u^{m-3}v^2\ldots+v^{m-1};$$

così l' equazione (3) diviene

$$\left.\begin{array}{l}u^{m-1}+u^{m-2}v+u^{m-3}v^2\ldots\ldots+v^{m-1}\\ =B+C(y+z)+D(y^2+yz+z^2)\\ +E(y^3+y^2z+yz^2+z^3)+\text{ec.}\end{array}\right\} \ldots (4)$$

Digitized by Google

Si supponga $y = z$, e conseguentemente $u = v$, quest' equazione (4) diviene

$$mv^{m-1} = B + 2Cy + 3Dy^2 + 4Ey^3 + \text{ec.}$$

oppure $m(1+y)^{m-1} = B + 2Cy + 3Dy^2 + 4Ey^3 + \text{ec.} \ldots (5)$

Moltiplicando ogni membro di quest'equazione per $1+y$, ed ordinando i termini rapporto ad y, avremo

$$\left.\begin{array}{l} m(1+y)^m = B + (B+2C)y + (2C+3D)y^2 \\ \quad + (3D+4E)y^3 + \text{ec.} \end{array}\right\} \ldots (6)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{ossia } m(1 + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4 + \text{ec.}) \\ \quad = B + (B+2C)y + (2C+3D)y^2 \\ \quad + (3D+4E)y^3 + (4E+5F)y^4 + \text{ec.} \end{array}\right\} \ldots (7)$$

Sostituendo per $(1+y)^m$ il suo valore dedotto dall'equazione (1), e nell' istesso tempo rimarcando che se, nell' equazione (1) si fa $y = 0$, si avrà $A = 1$. Eguagliando separatamente i coefficienti che moltiplicano la stessa potenza d'y, avremo $B = m$;

$$B + 2C = mB, \text{ e } C = \frac{B(m-1)}{2} = \frac{m(m-1)}{1.2};$$

$$2C + 3D = mC, \text{ e } D = \frac{C(m-2)}{3} = \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3};$$

$$3D + 4E = mD; \text{ ed } E = \frac{D(m-3)}{4} = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4};$$

Dunque,

$$\left.\begin{array}{l} (1+y)^m = 1 + \frac{m}{1}y + \frac{m(m-1)}{1.2}y^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}y^3 \\ \quad + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}y^4 + \text{ec.} \end{array}\right\} \ldots (8)$$

m essendo un numero intero, lo sviluppo o la serie cesserà, quando saremo giunti al termine dell'ordine $m+1$, perchè il seguente racchiuderebbe il fattore $m-m$, ossia zero.

Rimettiamo $\frac{a}{x}$ invece d'y, avremo

$$\left(1 + \frac{a}{x}\right)^m = \left(\frac{x+a}{x}\right)^m = \frac{(x+a)^m}{x^m} = 1 + m\frac{a}{x}$$

$$+ \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{a^2}{x^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\frac{a^3}{x^3} + \text{ec.}$$

Digitized by Google

Moltiplichiamo per x^m, avremo finalmente,

$$\left.\begin{aligned}(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2} \\ + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3x^{m-3} + \text{ec.}\end{aligned}\right\} \dots (9)$$

Formula dello stesso binomio nel caso in cui l'esponente è frazionario.

145. L'esponente frazionario è stato introdotto per indicare l'estrazione delle radici; e succede naturalmente dalle teorie esposte ai n.i 73, 82, ed 83, che $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$, ed $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$. In generale l'espressione $a^{\frac{m}{n}}$ è equivalente a $\sqrt[n]{a^m}$, e significa che si vuole estrarre la radice n^sima^ della potenza m^sima^ di a. Quest' espressione è pure equivalente a $(\sqrt[n]{a})^m$, e significa che si vuole alzare la radice n^sima^ di a alla potenza m. È facile perciò il fare sulle quantità radicali, tutte le operazioni algebriche che possono effettuarsi sulle quantità razionali; poichè basta cambiare i radicali in esponenti frazionarii, ed applicare in seguito a questi esponenti le regole che convengono agli esponenti intieri. Ciò posto, sia

$$(1+y)^{\frac{m}{n}} = A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4 + \text{ec.} \dots (1)$$

Sia pure,

$$(1+z)^{\frac{m}{n}} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{ec.}$$

È facile vedere eguagliando y o z a zero, che $A = 1$. Se ne deduce da quest' equazioni,

$$(1+y)^{\frac{m}{n}} - (1+z)^{\frac{m}{n}} = B(y-z) + C(y^2-z^2) + D(y^3-z^3) + E(y^4-z^4) + \text{ec.}$$

Dividendo per $y-z$, risulta

$$\left.\begin{aligned}\frac{(1+y)^{\frac{m}{n}} - (1+z)^{\frac{m}{n}}}{y-z} = B + C(y+z) \\ + D(y^2+yz+z^2) + E(y^3+y^2z+yz^2+z^3) + \text{ec.}\end{aligned}\right\} \dots (2)$$

Sia $1+y=u$, ed $1+z=v$; avremo

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{u^{\frac{m}{n}}-v^{\frac{m}{n}}}{y-z}=B+C\,(y+z)+D\,(y^2+yz+z^2)\\ \qquad +E\,(y^3+y^2z+yz^2+z^3)+\text{ec.}\end{array}\right\}\;..\;(3)$$

Sia di più $u=u'^n$, e $v=v'^n$; avremo

$$\frac{u^{\frac{m}{n}}-v^{\frac{m}{n}}}{u-v}=\frac{u'^m-v'^m}{u'^n-v'^n}=\frac{u'^{m-1}+u'^{m-2}v'+u'^{m-3}v'^2\ldots+v'^{m-1}}{u'^{n-1}+u'^{n-2}v'+u'^{n-3}v'^2\ldots+v'^{n-1}};$$

dividendo il numeratore ed il denominatore per $u'-v'$.

Se si sostituisce quest' ultima quantità nel primo membro dell' equazione (3); se quindi ci si suppone $u'=v'$, e per conseguenza $u=v$, ed $y=z$, avremo fatta ogni riduzione,

$$\frac{m}{n}\,(1+y)^{\frac{m}{n}-1}=B+2Cy+3Dy^2+4Ey^3+\text{ec.}\;\ldots\;(4)$$

Moltiplichiamo i due membri di quest' equazione per $1+y$, ed invece di $(1+y)^{\frac{m}{n}}$ nel primo membro, mettiamo il suo valore preso nell' equazione (1); avremo

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{m}{n}\,(1+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4+\text{ec.})=\ldots\\ B+(B+2C)y+(2C+3D)y^2+(3D+4E)y^3+\text{ ec.}\end{array}\right\}\;..\;(5)$$

Osserviamo qui che quest' equazione è l' istessa dell' equazione (7) del numero precedente, sostituendoci $\frac{m}{n}$ in vece di m. Così avremo

$$B=\frac{m}{n};\; C=\frac{B\left(\frac{m}{n}-1\right)}{2}=\frac{m\,(m-n)}{n\,.\,2n};$$

$$D=\frac{C\left(\frac{m}{n}-2\right)}{3}=\frac{m\,(m-n)\,(m-2n)}{n\,.\,2n\,.\,3n};$$

$$E=\frac{D\left(\frac{m}{n}-3\right)}{4}=\frac{m\,(m-n)\,(m-2n)\,(m-3n)}{n\,.\,2n\,.\,3n\,.\,4n};\text{ ec.}$$

La formula definitiva è dunque

$$\left.\begin{array}{l}(1+y)^{\frac{m}{n}}=1+\dfrac{m}{n}y+\dfrac{m\,(m-n)}{n\,.\,2n}y^2+\dfrac{m\,(m-n)\,(m-2n)}{n\,.\,2n\,.\,3n}y^3\\ \qquad +\dfrac{m\,(m-n)\,(m-2n)\,(m-3n)}{n\,.\,2n\,.\,3n\,.\,4n}y^4\ldots+\text{ec.}\end{array}\right\}\;..\;(6)$$

Digitized by Google

Questo sviluppo non può mai cessare, perchè m ed n essendo numeri primi fra loro, niuno dei fattori dei coefficienti può divenire nullo.

Questa formula ci servirà per lo sviluppo delle quantità esponenziali, e logaritmiche; se ne può anche fare uso per l'estrazione delle radici dalle quantità numeriche.

ESEMPIO.

146. Sia $m=1$, ed $n=2$, allora $(1+y)^{\frac{m}{n}}=(1+y)^{\frac{1}{2}}$ $=\sqrt{1+y}$: si ha dunque,

$$\sqrt{1+y}=1+\tfrac{1}{2}y-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}y^2+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}y^3-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}\cdot\tfrac{5}{8}y^4+\text{ec.}$$

I fattori dei numeratori sono la serie dei numeri dispari 1, 3, 5, ec., ed i fattori dei denominatori sono i numeri pari 2, 4, 6, 8, ec., coll'avvertenza di ripetere 1 al disopra dei primi due fattori. Bisogna che y sia una frazione molto minore dell'unità, affinchè il valore dei termini dello sviluppo decresca rapidamente, e che basti calcolare alcuni termini per avere una sufficiente approssimazione. Sia per esempio da estrarre la radice quadrata di 101, si farà

$$101=100+1=100\,(1+0{,}01);\ \sqrt{101}=10\sqrt{1+0{,}01}.$$

Mettiamo 0,01 per y nella serie precedente, avremo,

$$\sqrt{1+0{,}01}=1+0{,}005-0{,}0000125+0{,}0000000625$$
$$-0{,}00000000039+\text{ec.}=1{,}0049875621;$$

e $$\sqrt{101}=10{,}049875621;$$

Avremo coll'istesso calcolo,

$$\sqrt{99}=\sqrt{100-1}=10\sqrt{1-0{,}01}=10\ (1-0{,}005$$
$$-0{,}0000125-0{,}0000000625-0{,}00000000039,\text{ ec.})$$
$$=9{,}949874371.$$

È stato facile il vedere che tutti i termini di quest'ultimo sviluppo sono negativi, eccettuato il primo. In quanto al valore dei termini, ha dovuto essere evidentemente lo stesso che nello sviluppo $\sqrt{1+0{,}01}$.

Sia proposto per ultimo esempio, di prendere la radice

quinta di 260. Avremo $\sqrt[5]{260}=\sqrt[5]{243+17}=\sqrt[5]{3^5+17}$ $=3\sqrt[5]{1+\frac{17}{243}}$; facendo $y=\frac{17}{243}=0,0699590$; $\frac{m}{n}=\frac{1}{5}$; e la formula (6) del n.° precedente, darà

$$\sqrt[5]{260}=3,0408477.$$

Formula del binomio di Newton nel caso in cui l' esponente è negativo.

147. Osserviamo prima che una quantità algebrica della forma a^{-m}, è equivalente alla frazione $\frac{1}{a^m}$, siccome si è spiegato parlando della divisione algebrica.

Sia $(1+y)^{-m}=A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4+$ ec. . . . (1)

Sia pure,

$(1+z)^{-m}=A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+$ ec. . . . (2)

Tolghiamo l' equazione (2) dall' equazione (1), e dividiamo quindi da una parte e dall' altra, per $y-z$; avremo

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{(1+y)^{-m}-(1+z)^{-m}}{y-z}=B+C\,(y+z)\\ +D\,(y^2+yz+z^2)+E\,(y^3+y^2z+yz^2+z^3)+\text{ec.}\end{array}\right\}\ldots(3)$$

Sia $1+y=u$; $1+z=v$; a causa di

$$\frac{u^{-m}-v^{-m}}{u-v}=\frac{v^m-u^m}{u^mv^m\,(u-v)}=-\frac{1}{u^mv^m}\times\frac{u^m-v^m}{u-v}=-\frac{1}{u^mv^m}$$
$$\times\,(u^{m-1}+u^{m-2}v+u^{m-3}v^2+u^{m-4}v^3\ldots+v^{m-1}).$$

L' equazione (3) fatta ogni riduzione diviene

$$\left.\begin{array}{l}-\dfrac{1}{u^mv^m}\,(u^{m-1}+u^{m-2}v+u^{m-3}v^2+u^{m-4}v^3\ldots\\ +v^{m-1})=B+C\,(y+z)+D\,(y^2+yz+z^2)\\ \qquad+E\,(y^3+y^2z+yz^2+z^3)+\text{ec.}\end{array}\right\}\ldots(4)$$

Si faccia $y=z$, e per conseguenza $u=v$; di più si rimetta $1+y$ per u, l' equazione (4) diviene.

$$-m\,(1+y)^{-m-1}=B+2Cy+3Dy^2+4Ey^3+\text{ec.}\ldots(5)$$

Digitized by Google

Si moltiplichi per $1+y$, ed invece di $(1+y)^{-m}$ si sostituisca il suo valore preso nell' equazione (1) avremo,

$$\left.\begin{aligned} &-m\,(A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4+\text{ec.}) \\ &=(B+2Cy+3Dy^2+4Ey^3+\text{ec.})\times(1+y) \end{aligned}\right\}\ldots(6)$$

Quest' equazione essendo l' istessa dell' equazione (7) relativa al caso ove l' esponente è un numero intero, cangiandoci m in $-m$; il resto del calcolo, nel caso presente si dedurrà da quello del caso citato, cangiandoci m in $-m$. Così avremo definitivamente,

$$\left.\begin{aligned} (1+y)^{-m}&=1-\frac{m}{1}y+\frac{m(m+1)}{1.2}y^2 \\ &-\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}y^3+\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3.4}y^4-\text{ec.} \end{aligned}\right\}\ldots(7)$$

Formula per sviluppare in serie, la quantità esponenziale a^x.

148. Sia $a^x=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{ec.}$ (1)
Sia parimente

$$a^y=A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4+\text{ec.}\ \ldots\ldots(2)$$

Tolghiamo l' equazione (2) dall' equazione (1), e dividiamo per $x-y$, avremo

$$\left.\begin{aligned} \frac{a^x-a^y}{x-y}&=B+C(x+y)+D(x^2+xy+y^2) \\ &+E(x^3+x^2y+xy^2+y^3)+\text{ec.} \end{aligned}\right\}\ldots(3)$$

Sia $a=(1+b)$; avremo,

$$a^x-a^y=a^y(a^{x-y}-1)=a^y[(1+b)^{x-y}-1]=a^y\times$$
$$\left((x-y)b+\frac{(x-y)(x-y-1)}{1.2}b^2+\frac{(x-y)(x-y-1)(x-y-2)}{1.2.3}b^3,\ \text{ec.}\right)$$

Così l' equazione (3) diverrà,

$$\left.\begin{aligned} a^y\Big[\,&b+\frac{x-y-1}{2}b^2+\frac{(x-y-1)(x-y-2)}{2.3}b^3 \\ &+\frac{(x-y-1)(x-y-2)(x-y-3)}{2.3.4}b^4 \\ &+\frac{(x-y-1)(x-y-2)(x-y-3)(x-y-4)}{2.3.4.5}b^5\ldots\Big] \\ &=B+C(x+y)+D(x^2+xy+y^2) \\ &+E(x^3+x^2y+xy^2+y^3)+\text{ec.} \end{aligned}\right\}\ldots(4)$$

Facendo $x = y$ l' equazione (4) si cangia in questa:

$$\left.\begin{array}{l} a^x(b - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{4}b^4 + \frac{1}{5}b^5 - \frac{1}{6}b^6 + \text{ec.}) \\ = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \text{ec.} \end{array}\right\} \ldots (5)$$

Sia $k = b - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{4}b^4 + \frac{1}{5}b^5 - \frac{1}{6}b^6 + \text{ec.}$, e rimettendo il valore di a^x preso nell' equazione (1), si cangerà l' equazione (5) in quella che segue;

$$\left.\begin{array}{l} k(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{ec.}) \\ = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \text{ec.} \end{array}\right\} \ldots . (6)$$

Facendo $x = 0$ nell'equazione (1), si trova $A = a^0 = 1$. Dopo di ciò se si eguagliano insieme i coefficienti che moltiplicano la stessa potenza d' x nel primo e nel secondo membro dell' equazione (6), si trova successivamente,

$$B = \frac{k}{1};\ 2C = Bk, \text{ e } C = \frac{Bk}{2} = \frac{k^2}{1.2};\ 3D = Ck,$$
$$\text{e } D = \frac{Ck}{3} = \frac{k^3}{1.2.3};\ 4E = Dk, \text{ ed } E = \frac{Dk}{4} = \frac{k^4}{1.2.3.4};\ \text{ec.}$$

Così si ha definitivamente,

$$a^x = 1 + \frac{kx}{1} + \frac{k^2x^2}{1.2} + \frac{k^3x^3}{1.2.3} + \frac{k^4x^4}{1.2.3.4} + \frac{k^5x^5}{1.2.3.4.5} + \text{ec.} \ldots (7)$$

149. Sia prima $x = 1$, l' equazione (7) diviene.

$$\left.\begin{array}{l} a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1.2} + \frac{k^3}{1.2.3} + \frac{k^4}{1.2.3.4} \\ \quad + \frac{k^5}{1.2.3.4.5} + \text{ec.} \end{array}\right\} \ldots . (8)$$

Ma precedentemente abbiamo supposto

$$k = b - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{4}b^4 + \frac{1}{5}b^5 - \frac{1}{6}b^6 + \text{ec.} \ldots . (9),$$

equazione ove $b = a - 1$.

L' equazione (8) fa conoscere a, quando si dà k, e l' equazione (9) dimostra come si può avere k se a è cognita.

Sia $k = 1$ ed e il valore corrispondente di a, l' equazione (8) diviene,

$$e = 2{,}718281828459 \text{ ec.} \ldots \ldots (10)$$

Riguardo a k non si può calcolare comodamente coll' equazione (9) che supponendo $b < 1$. Sia per esempio $a = \frac{11}{10}$ e per conseguenza $b = \frac{1}{10}$ avremo,

$$k = 0{,}09531.$$

Se nell' equazione (7) si mette e per a, e per conseguenza 1 per k; avremo generalmente,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \text{ec.} \quad \ldots (11)$$

Si supponga $x = k$, avendo k il valore che gli si assegna nell' equazione (9); allora l' equazione (11) diviene.

$$e^k = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1.2} + \frac{k^3}{1.2.3} + \frac{k^4}{1.2.3.4} + \frac{k^5}{1.2.3.4.5} + \text{ec.} \quad \ldots (12)$$

Dunque riavvicinando (8) e (12), se ne conchiude.

$$a = e^k \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Formule logaritmiche.

150. Sia $y = a^x$ l' equazione ove x ed y sono quantità variabili, ed a una quantità costante che differisce dall' unità.

x è il logaritmo del numero qualunque y, ed a è la base del sistema del logaritmo. Se $a = 10$, avremo i logaritmi volgari, dei quali abbiamo precedentemente spicgata la teoria e l' uso.

151. Siano dunque due numeri qualunque $y = a^x$, ed $y' = a^{x'}$; avremo,

1.° $\quad y \cdot y' = a^{x+x'}$,

e $\quad \log. y \cdot y' = x + x' = \log. y + \log. y'$;

2.° $\quad \frac{y}{y'} = a^{x-x'}$,

e $\quad \log. \frac{y}{y'} = x - x' = \log. y - \log. y'$;

3.° $\quad y^m = a^{mx}$,

e $\quad \log. y^m = mx = m \log. y$;

4.° $\quad \sqrt[m]{y} = \sqrt[m]{a^x} = a^{\frac{x}{m}}$

e $\quad \log. \sqrt[m]{y} = \frac{x}{m} = \frac{\log. y}{m}$.

Così i logaritmi tratti dall' equazione $y = a^x = a^{\log. y}$, danno le medesime regole del calcolo che i logaritmi volgari.

152. Se nell' equazione $y = a^x$, si fa prima $x = 0$, e quindi $x = 1$; avremo nel primo caso, $y = a^0 = 1$, e nel secondo $y = a$. Passando dai numeri ai logaritmi, si trova $\log.\ 1 = 0$, e $\log.\ a = 1$. Così in ogni sistema di logaritmi, quello dell' unità è zero, e quello della base a è l' unità.

153. Dall' equazione $a = e^k$, si deduce in generale $\log.\ a = k \log.\ e$. Se a è la base del sistema, si trova $k = \frac{1}{\log.\ e}$, e $\log.\ e = \frac{1}{k}$. Se al contrario e è la base del sistema, avremo $\log.\ a = k$.

154. Chiamansi logaritmi di *Nepero*, i logaritmi la cui base è e, perchè sono quelli che Neper calcolò prima. Gli si era anche dato il nome di logaritmi iperbolici, perchè hanno dei rapporti coll' iperbola equilatera.

155. Occupiamoci prima dei logaritmi di Nepero. Per quello che si è veduto, k è il logaritmo di Nepero di a; così mettendo per k il valore tratto dall' equazione (9) delle quantità esponenziali, e facendo $a = 1 + y$, avremo il logaritmo di Nepero d' un numero qualunque $1 + y$ colla formula seguente;

$$\log.\ (1 + y) = y - \tfrac{1}{2} y^2 + \tfrac{1}{3} y^3 - \tfrac{1}{4} y^4 + \text{ec.} \ldots \quad (1)$$

Avremo similmente rimpiazzando y per $-y$,

$$\log.\ (1 - y) = -y - \tfrac{1}{2} y^2 - \tfrac{1}{3} y^3 - \tfrac{1}{4} y^4 - \text{ec.} \ldots \quad (2)$$

Si deduce dall' equazioni (1) e (2),

$$\left.\begin{aligned} &\log.\ (1 + y) - \log.\ (1 - y) = \log.\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \\ &= 2\left(y + \tfrac{1}{3} y^3 + \tfrac{1}{5} y^5 + \tfrac{1}{7} y^7 + \tfrac{1}{9} y^9 + \text{ec.}\right) \end{aligned}\right\} \ldots (3)$$

156. Sia $\frac{n+d}{n} = \frac{1+y}{1-y}$; da ciò si deduce $y = \frac{d}{2n+d}$. Mettendo questo valore per y nell' equazione (3), facendo attenzione che $n + d = n\left(\frac{n+d}{n}\right)$, e per conseguenza che $\log.\ (n + d) = \log.\ n + \log.\left(\frac{n+d}{n}\right)$; si avrà per passare dal logaritmo d' n a quello d' $n + d$, la formula seguente:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}\log.(n+d) = \log. n + 2\Big(\tfrac{d}{2n+d} + \tfrac{1}{3}\times\tfrac{d^3}{(2n+d)^3}\\ +\tfrac{1}{5}\times\tfrac{d^5}{(2n+d)^5} + \text{ec.}\Big)\end{aligned}\right\}\ldots(4)$$

157. Se si fa $d=1$, l'equazione (4) diviene,

$$\left.\begin{aligned}\log.(n+1) = \log. n + \tfrac{2}{2n+1}\Big(1 + \tfrac{1}{3}\times\tfrac{1}{(2n+1)^2}\\ +\tfrac{1}{5}\times\tfrac{1}{(2n+1)^4} + \tfrac{1}{7}\times\tfrac{1}{(2n+1)^6} + \text{ec.}\Big)\end{aligned}\right\}\ldots(5)$$

158. Sia prima $n=1$, avremo

$$\left.\begin{aligned}\log. 2 = \tfrac{2}{3}\Big(1+\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3^2}+\tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1}{3^4}+\tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{1}{3^6}\\ +\tfrac{1}{9}\cdot\tfrac{1}{3^8}+\tfrac{1}{11}\cdot\tfrac{1}{3^{10}}+\text{ec.}\Big) = 0,69314718056.\end{aligned}\right\}\ldots(6)$$

Facendo $n=2$, avremo.

$$\log. 3 = \log. 2 + \tfrac{2}{5}\Big(1+\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{5^2}+\tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1}{5^4}+\tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{1}{5^6}$$
$$+\tfrac{1}{9}\cdot\tfrac{1}{5^8}+\tfrac{1}{11}\cdot\tfrac{1}{5^{10}}+\text{ec.}\Big) = 1,09861229.$$

Nella stessa guisa si calcolerebbe il logaritmo d' ogni numero primo; e coi logaritmi dei numeri primi facilmente si avrebbero quelli dei loro multipli.

159. Per passare dai logaritmi di Nepero ai logaritmi volgari, bisogna riprendere l'equazioni $y=a^x$, ed $a=e^k$; bisogna di più supporre che a sia eguale a 10, e che rappresenti la base del sistema. Allora a causa di $a^x=e^{kx}$, si avrà x per il logaritmo volgare d' y, e kx per il logaritmo di Nepero della medesima quantità; ciò che fa vedere che si ha il logaritmo volgare dividendo il logaritmo di Nepero per k. Adesso dall' equazione $a=e^k$, si vede che k è il logaritmo di Nepero d' a, e per conseguenza quello di 10. Questo logaritmo di Nepero si calcola facendo $n=9$ nella formula (5), la quale dà, facendo attenzione che log. $9=2$ log. 3;

$$\log. 10 = 2\log. 3 + \tfrac{2}{19}\Big(\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{19^2}+\tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1}{19^4}+\tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{1}{19^6}$$
$$+\tfrac{1}{9}\cdot\tfrac{1}{19^8}+\text{ec.}\Big) = 2,302585092994.$$

160. Invece di dividere il logaritmo di Nepero per 2,302585092994, è più comodo moltiplicarlo per

$$\frac{1}{2,302585092994} = 0,4342944819.$$

Limitandosi ad 8 cifre decimali, log. $2 = 0,30103000$; tale quale trovasi infatti sulle tavole di Callet e di Borda.

161. La serie

$$\frac{2d}{2n+d}\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{d^2}{(2n+d)^2}+\text{ec.}\right)$$

ossia
$$\frac{2d}{2n+d}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2d^3}{(2n+d)^3}+\text{ec.}$$

esprime la differenza del logaritmo di Nepero d' $n+d$, e di quello d' n. Questa differenza si riduce al primo termine $\frac{2d}{2n+d}$, quando il seguente $\frac{1}{3}\cdot\frac{2d^3}{(2n+d)^3}$ è al disotto d' una parte decimale, il cui ordine è indicato dal numero delle cifre decimali impiegate nella valutazione dei logaritmi. Così nelle tavole di Callet, ove quest' ordine è il settimo, il termine $\frac{1}{3}\cdot\frac{2d^3}{(2n+d)^3}$ diviene trascurabile, dal momento in cui si ha $\frac{1}{3}\cdot\frac{2d^3}{(2n+d)^3} < 0,0000001$, o quando si ha $n > 100\ d$.

Quest' osservazione s' applica con maggiore ragione anche ai logaritmi volgari, che non sono precisamente la metà dei logaritmi di Nepero.

Di più a causa di $\frac{2d}{2n+d} = \frac{d}{n} - \frac{d^2}{2n^2} + \text{ec.}$ la differenza si riduce a $\frac{d}{n}$, quando $\frac{d^2}{2n^2}$ è al disotto della parte decimale di cui abbiamo parlato. Egli è ciò che accade nelle tavole di Callet, quando si ha $\frac{d^2}{2n^2} < 0,0000001$, ossia $n < 2237\ d$ o in numero tondo $n > 2500\ d$. In questo caso la differenza dei logaritmi rappresentata da $\frac{d}{n}$ diviene proporzionale a quella dei numeri, e reciprocamente la differenza dei numeri è proporzionale a quella dei logaritmi; sopra di ciò è fondato l' uso delle parti proporzionali nelle tavole dei logaritmi.

Digitized by Google

Valori logaritmici di diversi numeri.

162. Finiremo questo supplemento con una raccolta di logaritmi volgari d' alcuni numeri, dei quali si fa un uso frequentissimo nelle mattematiche applicate.

La nuova misura lineare è il metro, e l' antica è la tesa; il rapporto di queste due misure è tale, che

$$\log.\ 1^{\text{metro}} = \log.\ 0^{\text{tesa}},513074 = 9,7101800;$$
$$\log.\ 1^{\text{tesa}} = \log.\ 1^{\text{met.}},949036 = 0,2898200.$$

Il rapporto della circonferenza al diametro, o la semicirconferenza d' un circolo che ha per raggio l' unità, è

$$\pi = 3,1415926536;\ \log.\ \pi = 0,4971499.$$

Il raggio della terra considerata come sferica. . . . $= 6366198^{m}$, log. $= 6,8038801$.

Il grado d' un circolo massimo, nella medesima ipotesi $= 100000^{m}$, log. $= 5,000000000$.

Ed il grado sessagesimale $= 111111^{m},11$. . . . . log. $= 5,0457574$.

Considerando la terra come un elissoide di rivoluzione, il raggio dell' equatore $= 6376984^{m}$, log. $= 6,8046153$. Il semiasse di rotazione, o il raggio al polo $= 6356324^{m}$, log. $= 6,8032061$.

In questo caso lo schiacciamento o l' eccesso dell' asse maggiore preso per unità, sull' asse minore, è $\frac{1}{309}$.

La celerità del suono è di $337^{m},27$ per secondo, di 3600 per ora, log. $= 2,5279777$.

La gravità nel vuoto, o il doppio dello spazio che un corpo che cade liberamente percorrerebbe, nel primo secondo della sua caduta, è a Parigi,

$$g = 9^{m},8087952;\ \log. = 0,99161567.$$

Aumenta andando dall' equatore al polo, e diminuisce in un medesimo luogo, a misura che s' inalza al disopra delle pianure.

La lunghezza del pendulo semplice, battendo i secondi nel vacuo, è a Parigi,

$$= 0^{m},9938387,\ \log. = 9,9973159.$$

Questa lunghezza cresce proporzionatamente al quadrato del seno della latitudine, o come la gravità.

Digitized by Google

Nota. I logaritmi dei numeri puramente frazionarii sono qui presi conforme alla seconda osservazione del n.° 118. C'è pertanto un' altra maniera d' esprimere i logaritmi delle frazioni decimali; eccola. Sia per esempio la frazione $0,25 = \frac{25}{100}$; si ha log. $0,25 =$ log. $25 -$ log. $100 = 1,39794 - 2 = -1 + 0,39794$; ultima espressione che scrivesi così $\bar{1},39794$. Parimente log. $0,025 = \bar{2},39794$. Così la caratteristica sola del logaritmo è negativa. Alcuni autori fanno uso di questo metodo; ma quello indicato al numero citato essendo uniforme, è generalmente il più seguìto.

ELEMENTI
DI GEOMETRIA.

LIBRO PRIMO.

CAPITOLO PRIMO.

PRINCIPII FONDAMENTALI DELLA GEOMETRIA.

Nozioni generali sopra l'estensione.

1. Lo spazio che i corpi occupano ha necessariamente tre dimensioni, a cui si danno i nomi di *lunghezza*, *larghezza*, e *grossezza*.

I limiti d' un corpo sono delle *superficie*; così una superficie è un' estensione in lunghezza e larghezza soltanto.

I limiti delle superficie, che chiamansi *linee*, non sono dotati che d' una sola dimensione che è la lunghezza.

Finalmente i limiti delle linee, indicati sotto il nome di *punti* non hanno nè lunghezza, nè larghezza, nè grossezza.

È evidente che queste diverse specie di limiti non possono separatamente esistere: pure coll' immaginazione le consideriamo ognuna in particolare; e per procedere dal semplice al composto, successivamente esporremo le principali proprietà delle linee, delle superficie, e dei corpi. Questo è l' oggetto della Geometria.

Della natura delle linee e delle superficie.

2. La *linea retta* è il più corto cammino da un punto ad un altro: così fra due punti dati, non si può condurre che una sola linea retta.

3. Ogni linea che non è retta, nè composta di linee rette, è una linea *curva*. La linea retta è unica nella sua specie; ma ci sono un' infinità di linee curve diverse.

4. Il *piano* o la *superficie piana* è quella su cui si concepisce che si possa applicare una linea retta in ogni

senso. Le linee delle figure relative a questo libro, saranno tutte situate sopra una tale superficie.

5. Ogni superficie che non è nè piana, nè composta di diversi piani, è una superficie *curva*. Il piano è unico nella sua specie, ma le superficie curve sono diversificate all' infinito.

6. Fra le linee curve, la più semplice nella sua natura, e quella che unicamente si considera negli elementi di Geometria, è la linea *circolare*, o la *circonferenza del circolo*, di cui tutti i punti situati sopra uno stesso piano, sono egualmente lontani da un' altro punto preso in questo piano, e che chiamasi *centro*. (fig. 1)

Delle proprietà delle linee rette che derivano dalle loro respettive posizioni.

7. È evidente che una retta non può incontrarne un'altra che in un solo punto.

8. Un *angolo* è lo spazio indefinito compreso fra due rette che si tagliano, e che si possono concepire prolungate quanto si vorrà. Le rette *CA*, *CB*, sono i lati dell'angolo *ACB*, ed il punto *C* ne è il *vertice*. (fig. 2)

9. *Due angoli sono eguali*, *quando essendo posti l'uno sull' altro*, *si coprono perfettamente*.

10. Se la posizione rispettiva di due rette *AB*, *CD* è tale, che i due angoli adiacenti *ACD*, *DCB* siano eguali, ognuno di questi angoli si chiama *angolo retto*, e la retta *CD* è detta *perpendicolare* ad *AB*, o reciprocamente. È evidente che *tutti gli angoli retti* sono eguali fra loro, poichè lo stesso spazio *ADB* non può essere diviso in due parti eguali, in diverse maniere dalla retta *CD*. (fig. 3)

11. Ogni angolo minore d' un retto, chiamasi *angolo acuto* : tal è l' angolo *HGF*. (fig. 4)

Ogni angolo maggiore d' un retto, chiamasi *angolo ottuso* ; tal è l' angolo *EGH*.

12. *Ogni linea che ne incontra un' altra*, *fa con questa due angoli adiacenti*, *la cui somma è eguale a due angoli retti*. È infatti evidente, che i due angoli adiacenti *EGH*, *HGF* presi insieme, valgono due angoli retti. (fig. 5)

Dunque se uno degli angoli è retto l' altro lo è pure, e le linee che formano questi angoli sono necessariamente perpendicolari l' una all' altra.

Digitized by Google

13. *Tutti gli angoli consecutivi* ABD, DBE, EBC *formati da uno stesso lato della retta* AC, *e presi insieme, equivalgono a due angoli retti.* (fig. 6)

14. *Quando due rette si tagliano, gli angoli opposti al vertice sono eguali.* (fig. 7) In fatti la somma dei due angoli adiacenti ACD, ACE, è eguale a due angoli retti; e parimente la somma dei due angoli ACD, DCB, è eguale a due angoli retti; dunque se da ognuna di queste somme si toglie l'angolo comune ACD, resterà l'angolo ACE eguale al suo opposto DCB.

15. Da ciò ne segue che *tutti gli angoli che possono formarsi attorno ad un punto, vagliono quattro angoli retti.*

Dei triangoli, e della loro eguaglianza.

16. Ci bisognano tre rette almeno per racchiudere uno spazio, ed in questo caso, questo spazio chiamasi *triangolo*; tal è lo spazio ABC. Le linee AB, AC, BC, sono i *lati* di questo triangolo. (fig. 8)

17. *Due triangoli sono eguali, quando hanno un angolo eguale compreso fra due lati respettivamente eguali.*

Sia; (fig. 8) $A = A'$, $AB = A'B'$, $AC = A'C'$.

I due triangoli ABC, $A'B'C'$ possono essere posti l'uno sull'altro, in modo che perfettamente si coincidano. Prima di tutto, se si pone il lato $A'B'$ sul suo eguale AB, il lato $A'C'$ caderà sul suo eguale AC, a causa dell'eguaglianza degli angoli A ed A'. Dunque il lato $C'B'$ coprirà perfettamente BC. Dunque, ec.

Da ciò se ne conchiude che $BC = B'C'$, $B = B'$, $C = C'$.

18. *Due triangoli sono eguali, quando hanno un lato eguale adiacente a due angoli respettivamente eguali.*

Sia; (fig. 8) $A' = A$, $B' = B$, $A'B' = AB$.

Per operare la soprapposizione, sia posto $A'B'$ sul suo eguale AB: allora a causa dell'eguaglianza degli angoli A ed A', il lato $A'C'$ caderà sopra AC. Parimente poichè gli angoli B, B' sono eguali, il lato $B'C'$ caderà sopra BC: il punto C' coinciderà dunque col punto C; dunque, ec.

Da ciò ne segue che $C = C'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$.

19. *In ogni triangolo un lato qualunque è minore della somma degli altri due.*

Digitized by Google

Poichè la linea retta AC per esempio, è il più corto cammino da A in C: dunque AC è minore di $AB+BC$.

20. *Se da un punto* O *preso dentro un triangolo* ABC, *si conducono all' estremità del lato* AB *le rette* AO, BO, *la somma di queste due linee sarà minore di quella degli altri due lati* AC, BC. (fig. 9)

Si prolunghi AO fino in D. Nel triangolo ODB, avremo $OB < OD + DB$; aggiungendo da ambe le parti AO, verrà $AO + OB < AO + OD + DB$; ossia $AO + OB < AD + DB$. Parimente $AD < AC + CD$; aggiungendo da ambe le parti DB, avremo

$$AD + DB < AC + CB;$$

ma abbiamo trovato $AO + OB < AD + DB$, dunque a più forte ragione,

$$AO + OB < AC + CB.$$

21. *Se due triangoli hanno un angolo disuguale compreso fra due lati respettivamente eguali, il terzo lato opposto all' angolo minore, sarà minore del terzo lato opposto all' angolo maggiore.* (fig. 10)

Sia per esempio $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $A < A'$, avremo $CB < C'B'$.

Questa proposizione è per così dire evidente da per se stessa; poichè si concepisce che se i due lati AC, AB restano della medesima grandezza, mentre il terzo lato CB aumenta o diminuisce incessantemente, l' angolo A opposto a quello, dovrà naturalmente vie più aumentare o diminuire. Eccone per altro una dimostrazione rigorosa.

Ponendo il triangolo ACB sul triangolo $A'C'B'$, in modo che AB coincida con $A'B'$, possono accadere tre casi: o che il punto C cada dentro al triangolo $A'C'B'$, o sul lato $C'B'$, oppure fuori del triangolo $A'C'B'$.

I. Caso. (fig. 10') Se il punto C cade dentro al triangolo $A'B'C'$, come in C'', avremo $A'C'' + C''B' < A'C' + C'B'$. Togliendo da una parte $A'C'' = AC$, e dall' altra la sua eguale $A'C'$, resterà

$$C''B' \text{ ossia } CB < C'B'.$$

II. Caso. (fig. 10'') Se il punto C cade in C''' sul lato $C'B'$, egli è evidente che $B'C'''$, o la sua eguale BC sarà minore di $B'C'$.

III. Caso. (fig. 10''') Finalmente se il punto C cade al di fuori come in C^{IV}; avremo,

$A'C' < C'D + A'D$, e $C^{IV} B' < C^{IV} D + DB'$.

Aggiungendo queste due disuguaglianze, membro per membro avremo,

$$A'C' + C^{IV} B' < C'B' + A' C^{IV}$$

Togliendo da una parte $A'C'$, e dall'altra la sua eguale $A'C^{IV}$ resterà

$$C^{IV} B' \text{ ossia } CB < C'B'.$$

22. *Due triangoli sono eguali quando hanno i loro tre lati respettivamente eguali.* (fig. 8)

Poichè i tre lati del triangolo ABC sono respettivamente eguali ai tre lati del triangolo $A'B'C'$, si deve avere $A = A'$ per esempio; poichè se A fosse maggiore o minore di A', bisognerebbe che si avesse CB maggiore o minore di $C'B'$ (n.° 21); ma questi lati sono eguali, dunque A dev'essere eguale A'. Parimente si proverebbe che $B = B'$, e che $C = C'$.

Osserveremo che gli angoli eguali sono opposti ai lati eguali, e reciprocamente.

Delle linee perpendicolari e delle oblique.

23. Si può riguardare come una verità incontrastabile, che per un punto preso sopra una retta, non si può alzare che una sola perpendicolare a questa retta. Così supponendo che CD faccia con AB due angoli eguali ACD, DCB adiacenti, la retta CD è perpendicolare ad AB. (n.° 10). (fig. 3)

Le linee tali che CD, che non sono perpendicolari ad AB, chiamansi *oblique*. (fig. 7)

24. *Quando per un punto preso fuori d' una retta, si conducono diverse linee sopra varii punti di questa retta, 1.° la perpendicolare è più corta di qualunque obliqua; 2.° le oblique che s' allontanano egualmente dal piede della perpendicolare sono eguali; 3.° di due oblique diseguali, la più lunga è quella che maggiormente s' allontana dal piede di questa perpendicolare.* (fig. 11)

Sia prolungata AB, perpendicolare a DE, d' una quantità $BF = AB$; e siano condotte le rette CF, e DF.

Il triangolo CBF è eguale al triangolo ABC, poichè tanto l' uno che l' altro hanno un angolo eguale in B,

compreso fra dne lati respettivamente eguali (n.° 17): Infatti CB è comune ai due triangoli; di più $BF = AB$ per costruzione, e gli angoli in B sono retti per ipotesi; così $CF = AC$. Ma la linea ABF essendo retta, si ha $AF < AC + CF$; dunque AB, metà di AF è minore di AC, metà della linea spezzata ACF. Dunque la perpendicolare AB è più corta d' ogni obliqua AC, AD.

Sia adesso $BE = BC$. Il triangolo ABE sarà evidentemente eguale al triangolo ACB (n.° 17); dunque $AE = AC$: dunque due oblique che s'allontanano egualmente dal piede B della perpendicolare AB, sono eguali.

Nel triangolo ACF la linea spezzata ADF è più corta della linea spezzata ACF (n.° 20); dunque la metà della prima ossia AD è più corta della metà della seconda, ossia d' AC; dunque di due oblique disuguali, la maggiore è quella che di più s' allontana dal piede della perpendicolare.

La perpendicolare essendo minore d' ogni obliqua, misura la vera distanza da un punto ad una retta.

25. Ne segue da ciò che precede, che *da un punto preso fuori d' una retta non si può abbassare che una sola perpendicolare su questa retta;*

Che *da un medesimo punto non si possono condurre tre rette eguali sopra una medesima linea retta;*

Che *quando due triangoli hanno ognuno un angolo retto, sono eguali se hanno inoltre due lati della medesima specie respettivamente eguali, o un altro angolo eguale adiacente ad un lato eguale della stessa specie;*

Che (fig. 12) *se una retta* CD *è perpendicolare sul mezzo d'un' altra* AB, *ogni punto* O *della prima, sarà egualmente distante dall' estremità* A *e* B *della seconda;*

Che *ogni punto* E, *situato fuori della perpendicolare* CD, *è disugualmente lontano dall' estremità di* AB. Infatti essendo il punto O ad egual distanza dall' estremità di AB, si ha $AO = OB$; e siccome nel triangolo EOB, il lato $BE < OE + OB$, ne segne che $EB < OE + AO$; dunqne $EB < AE$.

26. *Se un triangolo ha due lati eguali, gli angoli opposti a questi due lati sono eguali.* (fig. 12)

Sia $AO = OB$. Se dal punto O s' abbassa OC perpendicolare sopra AB, avremo necessariamente $AC = CB$; così i dne triangoli AOC, BOC saranno eguali, avendo i tre lati respettivamente eguali, o un angolo retto com-

preso fra due lati respettivamente eguali. Dunque l' angolo A = all' angolo OBA.

Reciprocamente se gli angoli A e B sono eguali, i lati OB, AO, opposti a questi angoli, saranno eguali.

27. *Quando due lati d' un triangolo sono disuguali, l' angolo maggiore è quello che è opposto al lato maggiore.*

Sia $AE > EB$. Alzate CD perpendicolare sul mezzo di AB, e conducete OB. In conseguenza di questa costruzione, gli angoli OBA, OAB sono eguali. Ma l'angolo EBA è maggiore d' OBA; dunque l' angolo EBA, opposto al lato maggiore AE, è maggiore dell' angolo A opposto al lato minore EB. La reciproca di questo teorema è parimente vera.

Ne segue da ciò che quando tre lati d'un triangolo sono eguali, i tre angoli lo sono pure, e reciprocamente.

Teoria delle parallele e conseguenze che ne risultano.

28. Due rette sono dette *parallele*, quando essendo situate sopra un medesimo piano, non possono mai incontrarsi. Le due rette AC, BD, perpendicolari ad un' altra retta AB, sono dunque parallele (n.° 25). (fig. 13)

Ammetteremo per principio che una retta perpendicolare ad un' altra, è incontrata da tutte quelle che sono oblique sopra quella medesima. Così l'obliqua BE, essendo sufficentemente prolungata, incontrerà per necessità la linea AC, perpendicolare ad AB. La difficoltà di provare rigorosamente questa proposizione, rende imperfetta la teoria delle parallele.

29. *Se due parallele sono tagliate da una terza retta, la somma dei due angoli interni dal medesimo lato, sarà eguale a due angoli retti.* (fig. 14)

Dal mezzo M della retta GH abbassiamo sopra AB la perpendicolare MH; questa linea sarà nel medesimo tempo perpendicolare a CD (n.° precedente). I triangoli MKG, MLH ambedue *rettangoli*, l' uno in K, l' altro in L, sono eguali, perchè i lati GM, MH, lo sono pure per costruzione, come pure gli angoli KMG, HML, perchè opposti al vertice (n.° 14). Dunque l' angolo KGM = all' angolo MHL. Ma gli angoli KGM, MGA, vagliano insieme due angoli retti, e l' istesso accade degli angoli MHL, MHD; dunque gli angoli MGB, MHD, interni dal medesimo lato, riuniti, formano due angoli retti.

Per abbreviare il discorso, si chiamano *angoli corrispondenti*, gli angoli eguali *AGE*, *CHE*, situati da un medesimo lato della segante *EF*.

Angoli alterni interni, gli angoli eguali *KGM*, *MHL*, situati da una parte e dall' altra della segante *EF*, e fra le parallele *AB*, *CD*;

Angoli alterni esterni, gli angoli eguali *FGK*, *EHL*, situati da una parte, e dall' altra della segante, e al di fuori delle parallele.

È rimarcabile che tutti gli angoli acuti sono, in questa figura, eguali fra loro, come pure tutti gli angoli ottusi.

30. *Due rette parallele ad una terza sono parallele fra loro*. (fig. 13)

Siano *AC* e *CH* parallele a *BD*. Da un punto qualunque *G* alzate alla retta *BD* la perpendicolare *GB*. Questa linea sarà alla volta perpendicolare alle rette *AC*, *GH*; dunque queste rette sono perpendicolari ad una medesima linea; esse sono adunque parallele (n° 28).

31. *Due parallele sono dappertutto egualmente distanti*. (fig. 15)

Se fra le due parallele *AB*, *CD*, si conducono per tutto ove piacerà le perpendicolari *AC*, *BD* alla retta *AB*, queste perpendicolari saranno eguali. Infatti i triangoli *ACB*, *CBD*, sono eguali, avendo un lato eguale adiacente a due angoli respettivamente eguali; poichè *CB* è comune ai due triangoli; gli angoli alterni interni *CBA*, *BCD*, sono eguali; per la stessa ragione c' è eguaglianza fra gli angoli *ACB*, *CBD*: dunque $AC = BD$.

Si può da ciò conchiudere, che le parti delle parallele comprese fra parallele sono eguali, e reciprocamente.

32. *Se due angoli hanno i lati respettivamente paralleli* e *diretti nello stesso senso, quest'angoli sono eguali*. (fig. 16)

Sia *DF* parallelo ad *AB*, e *DE* parallelo ad *AC*. Prolungate *DE* fino in *G*. La retta *EG* essendo una segante riguardo alle parallele *AB*, *DF*, gli angoli *EDF*, *EGB* corrispondenti sono eguali. Parimente la retta *AB* essendo una segante per rapporto alle parallele *AC*, *GE*, gli angoli *A*, e *G* sono eguali. Dunque l'angolo $A =$ all'angolo *D*.

Delle linee rette considerate nel circolo, e della misura degli angoli.

33. Ogni retta condotta dal centro alla circonferenza d'un circolo, chiamasi *raggio*. Così *CA* è un raggio. (fig. 17)

Digitized by Google

Una retta non può evidentemente incontrare una circonferenza di un circolo in più di due punti.

Si chiama *arco* una porzione di circonferenza.

La *corda o sottesa* d' un arco tale che ADB, è la retta AB, che ne unisce le sue due estremità.

Una corda che passa per il centro del circolo, si chiama *diametro*; il diametro AE è dunque doppio del raggio AC.

Ogni linea MN che taglia la circonferenza, si chiama *segante*.

La superficie, o porzione di circolo compresa fra l' arco e la sua corda, si chiama *segmento*. Tal è la parte $ADBA$.

La porzione di circolo compresa fra un arco AB e i due raggi AC, CB condotti all' estremità di quest' arco, si chiama *settore*.

La *tangente* alla circonferenza è una retta come PQ, che non ha che un punto R di comune con questa circonferenza. Questo punto si chiama punto di *contatto* o di *contingenza*.

Un angolo viene detto *inscritto*, quando il suo vertice è alla circonferenza, e che è formato da due corde. L'angolo C per esempio è un angolo inscritto. (fig. 24)

34. *In un medesimo circolo o in circoli eguali, gli archi eguali sono sottesi da corde eguali e reciprocamente.* (fig. 18)

Se l'arco AMB è eguale all'arco DNE, avremo la corda $AB =$ alla corda DE, poichè l' arco AMB potrà essere soprapposto esattamente sopra l' arco DNE, a causa della loro eguaglianza e della uniformità colla loro curva. Dunque i punti A, B cadendo respettivamente in E ed in D, avremo necessariamente $AB = DE$.

Reciprocamente se le corde AB, DE sono eguali gli archi AMB, DNE ch' esse sottendono saranno eguali; poichè egli è evidente che i triangoli, ACB, DCE hanno i tre lati respettivamente eguali; dunque gli angoli ACB, DCE sono eguali; dunque gli archi AMB, DNE lo sono pure.

35. *L' arco maggiore è sotteso da una corda maggiore, e reciprocamente.*

Sia l' arco $ABD >$ dell' arco AMB: i triangoli ACB, ACD avranno due lati respettivamente eguali, poichè le rette AC, CB, CD sono raggi d' un medesimo circolo; ma l' angolo ACB è minore dell' angolo ACD, dunque (n.° 21) $AB < AD$.

Reciprocamente se la corda $AD >$ della corda AB, dagli stessi triangoli si conchiuderà, che l'angolo $ACD >$ dell'angolo ACB.

36. *La perpendicolare alzata all'estremità del raggio d'un circolo è tangente alla circonferenza.* (fig. 19)

Supponghiamo che AB sia perpendicolare al raggio AC; ogni obliqua CB sarà più lunga di questo raggio (n.° 24), ed il punto B sarà per conseguenza fuori del circolo. La linea AB non ha dunque che il punto A di comune colla circonferenza. Dunque AB è una tangete (n.° 33).

Accade da ciò (fig. 20); che quando due circoli si toccano internamente o esternamente, il punto di contatto ed i centri dei circoli sono sopra una medesima linea retta.

37. *Ogni raggio perpendicolare ad una corda, passa per il mezzo di questa corda, e per la metà dell'arco sotteso.* (fig. 21)

I due raggi AC, CB essendo due oblique eguali, devono egualmente allontanarsi dalla perpendicolare CD; dunque $AE = EB$. In secondo luogo poichè la perpendicolare CD passa per il mezzo di AB, il punto D preso sopra questa perpendicolare, è ad eguale distanza da A e B: dunque la corda $AD =$ alla corda DB; dunque poichè queste corde sono eguali, gli archi AD, DB sono eguali (n.° 34).

Da ciò risulta che il centro C, il mezzo E della corda AB, ed il mezzo D dell'arco ADB, sono tre punti situati in linea retta.

(fig. 17) Se ne dedurrebbe anche per conseguenza, che gli archi EM, AN compresi fra parallele, sono eguali.

38. *Due angoli stanno sempre fra loro come gli archi intercetti fra i loro lati, e descritti dai loro vertici come centri, con raggi eguali.* (fig. 22)

Supponghiamo prima che gli angoli ACB, $A'C'B'$ siano in un rapporto commensurabile, come $3 : 5$, per esempio; o ciò che torna lo stesso, supponghiamo che l'angolo M, preso per misura comune, sia contenuto tre volte nell'angolo ACB, e cinque volte in $A'C'B'$. Gli angoli parziali essendo eguali, i loro archi respettivi $Ax, xy, \ldots, A'x', x'y', \ldots$ saranno pure eguali fra loro; dunque l'arco intiero AB starà all'arco intiero $A'B'$ come $3 : 5$.

Questo ragionamento avendo sempre luogo, qualunque siasi il rapporto commensurabile degli angoli C, C', ne segue che gli archi AB, $A'B'$ sono nel medesimo rappor-

to: ed è chiaro che la reciproca di questa proposizione è egualmente vera.

Se i due angoli ACB, $A'C'B'$ non sono in un rapporto commensurabile, (fig. 23) portiamo l'angolo minore $A'C'B'$ sul maggiore; cioè facciamo $ACB'' = A'C'B'$, e supponghiamo che la proporzione precedente non avendo luogo, si abbia allora,

$$\text{ang. } ACB : \text{ang. } ACB'' :: \text{arc } AB : \text{arc } AO.$$

Concepiamo quindi che l'arco AB sia diviso in parti eguali, delle quali ognuna sia minore di $B''O$; ci sarà necessariamente un punto di divisione I fra B'' ed O, ed allora in virtù della commensurabilità,

$$\text{ang. } ACB : \text{ang. } ACI :: \text{arc } AB : \text{arc } AI.$$

Da questa proposizione e dalla precedente se ne conchiude, a causa dell'eguaglianza degli antecedenti,

$$\text{ang. } ACB'' : \text{ang. } ACI :: \text{arc } AO : \text{arc } AI.$$

Ma l'arco AO è maggiore dell'arco AI; perchè dunque quest'ultima proporzione potesse sussistere, bisognerebbe che si avesse anche l'ang. ACB'' maggiore dell'ang. ACI; adesso, al contrario, è minore, dunque è impossibile che l'angolo ACB stia all'ang. $A'C'B'$, come l'arco AB sta ad un arco maggiore d'$A'B'$ ossia AB''.

Si proverebbe parimente, che il quarto termine della proporzione non può essere minore di $A'B'$; dunque gli è eguale; dunque si ha sempre

$$\text{ang. } ACB : \text{ang. } A'C'B' :: \text{arc } AB : \text{arc } A'B'.$$

Poichè l'angolo al centro del circolo e l'arco intercetto aumentano o diminuiscono nel medesimo rapporto, si può prendere una di queste grandezze per misura dell'altra. È questa una delle ragioni che ha impegnato i geometri a prendere l'arco AB per misura dell'arco ACB, per quanto sia più naturale il misurare una grandezza con un'altra della medesima specie. Egli è evidente che quest'angolo sarebbe retto, se l'arco AB fosse il quarto dell'intiera circonferenza.

39. Se ne deduce da ciò che precede la conseguenza, *che due settori presi nel medesimo circolo*, o *in circoli eguali*, *stanno fra loro come i loro archi respettivi*; così gli archi che servono di misura agli angoli, possono anche servirne ai settori d'un medesimo circolo.

40. *Ogni angolo inscritto o formato da due corde, ha per misura la metà dell'arco compreso fra i suoi lati.* (fig. 24)

Supponghiamo che uno dei lati dell'angolo ACB sia un diametro, il lato CB, per esempio; e conduchiamo per il centro O la retta EF parallela ad AC.

L'angolo al centro FOB è eguale all'angolo C, come corrispondente; così la misura dell'uno è quella dell'altro. Di più l'arco $FB = CE$ è la misura dell'angolo FOB (n.° 38), e gli archi AF, CE sono eguali perchè compresi fra prallele (n.° 37): dunque l'angolo C ha per misura $BF = \frac{AB}{2}$.

(fig. 25) Se il centro O fosse nell'interno dell'angolo C, si condurrebbe il diametro COD. Le misure degli angoli respettivi ACD, BCD sono $\frac{AD}{2}$ e $\frac{BD}{2}$; dunque l'angolo proposto ACB ha per misura $\frac{AD}{2} + \frac{BD}{2}$, cioè $\frac{AB}{2}$.

(fig. 26) Finalmente se il centro O è esterno all'angolo ACB, si conduca il diametro COD. È chiaro, che siccome quest'angolo è eguale ad $ACD - BCD$, la sua misura $= \frac{DA}{2} - \frac{BD}{2}$ cioè $= \frac{AB}{2}$.

41. *Un angolo formato da una corda e da una tangente, ha per misura la metà dell'arco compreso fra i suoi lati.* (fig. 27)

Si conduca il diametro CD. Se l'angolo ACB formato dalla corda CB e dalla tangente CA è minore d'un retto, il diametro CD sarà fuori di quest'angolo, ed il contrario avrà luogo per l'angolo ACF. Nel primo caso $ACB = ACD - BCD$, e poichè l'angolo ACD è retto, il quarto della circonferenza $= \frac{CBD}{2}$ ne sarà la misura (n.° 38). Da un altro canto, l'angolo BCD ha per misura $\frac{BD}{2}$, dunque la misura dell' angolo $ACB = \frac{CBD}{2} - \frac{BD}{2}$ $= \frac{CB}{2}$.

Nel secondo caso, si ha $ACF = ACD + DCF$; dunque l'angolo ACF ha per misura $\frac{CBD}{2} + \frac{DF}{2} = \frac{CBDF}{2}$; vale a dire la metà dell'arco compreso fra i suoi lati.

Digitized by Google

Dei Poligoni, e delle loro principali proprietà.

42. Le snperficie piane terminate da diverse linee o lati, si chiamano *poligoni.* Il più semplice di tutti è il triangolo di cui abbiamo già esaminato alcune proprietà.

Il triangolo, considerato rapporto ai snoi lati, chiamasi

Equilatero, qnando i suoi tre lati sono eguali.
Isoscele, quando ha due soli lati eguali.
Scaleno, quando i suoi tre lati sono diseguali.

Considerato rapporto ai suoi angoli egli è

Rettangolo, quando ha un angolo retto.
Ottusiangolo, quando ha nn angolo ottuso.
Acuziangolo, quando i suoi tre angoli sono acuti.
Equiangolo, quando i suoi tre angoli sono eguali.

Nel triangolo rettangolo, il lato opposto all'angolo retto dicesi *ipotenusa.*

Dopo il poligono di tre lati o il triangolo, viene il poligono.

di 4 lati denominato . . *Quadrilatero.*
5 . . . . *Pentagono.*
6 . . . . *Esagono.*
7 . . . . *Eptagono.*
8 . . . . *Ottagono.*
9 . . . . *Enneagono.*
10 . . . . *Decagono.*

Questa nomenclatura s'estende poco o nulla al di là del decagono; pertanto si chiama anche *dodecagono* il poligono di 12 lati, e *pentedecagono* quello di 15 lati.

Il quadrilatero che ha i lati opposti paralleli, chiamasi *parallelogrammo:* prende il nome di *rettangolo* se i suoi angoli sono retti. (fig. 28)

La *losanga o rombo* è un parallelogrammo di cui i qnattro lati sono eguali. (fig. 29)

Il *quadrato* è il parallelogrammo di cui gli angoli sono retti ed i lati eguali. (fig. 30)

Un poligono che è alla volta equiangolo ed equilatero, dicesi *poligono regolare.*

Ogni linea tirata dal vertice d'un angolo a quello d'un altro angolo, nell'interno d'un poligono, si chiama *diagonale.*

43. *I tre angoli d'un triangolo rettilineo, presi insieme, vagliono due angoli retti.* (fig. 31)

Digitized by Google

Se si prolunga AC, e si conduce CE parallela ad AB, gli angoli A e DCE saranno eguali come corrispondenti. Parimente gli angoli B e BCE saranno eguali come alterni interni. Ma i tre angoli ECD, BCE, ACB equivalgono presi insieme a due angoli retti; dunque anche i tre angoli d' un triangolo rettilineo saranno eguali a due angoli retti.

Segue evidentemente da ciò, 1.° che l' angolo esterno BCD equivale alla somma dei due interni opposti A e B.

2.° Che se uno degli angoli d' un triangolo è retto, ognuno dei due altri angoli è acuto, e la somma di questi forma un angolo retto.

44. *La somma degli angoli interni d' un poligono è eguale a tante volte due angoli retti, quanti lati ci sono meno due.* (fig. 32 e 33)

Se dal medesimo punto A si conducono, a tutti i vertici degli angoli opposti, delle diagonali AC, AD,... è facile vedere che il poligono sarà diviso in tanti triangoli quanti lati ha il poligono meno due. La somma di tutti gli angoli di questi triangoli forma quella degli angoli del poligono; dunque questa somma è eguale a tante volte due angoli retti quanti lati meno due ci sono nel poligono. Così nel caso della fig. 32, che rappresenta un pentagono, la somma degli angoli interni è eguale a tre volte due angoli retti, o a sei angoli retti.

Se per n s' indica il numero dei lati del poligono proposto, per s la somma dei suoi angoli; e per D l'angolo retto, avremo in generale,

$$s = (n - 2) \times 2D.$$

45. È facile adesso il dimostrare, che *se si prolungano nel medesimo senso* (fig. 33) *i lati del poligono convesso, v. a. d. d' un poligono che non ha che gli angoli saglienti, la somma di tutti gli angoli esterni sarà sempre eguale a quattro angoli retti.*

Infatti tutti gli angoli, tanto interni che esterni, equivalgono a tante volte due angoli retti quanti lati ci sono, e la somma degli angoli interni essendo solamente eguale a tante volte due angoli retti quanti sono i lati meno due, egli è evidente che la differenza di queste due somme, che esprime la somma degli angoli esterni, è eguale a due volte due angoli retti, ossia a quattro angoli retti.

Questa proposizione e la precedente sono principalmente utili per assicurarsi di non avere commesso errore veruno nella misura degli angoli d' un poligono delineato sul terreno, siccome in seguito vedremo.

CAPITOLO II.

TEORIA DELLE LINEE PROPORZIONALI, SIMILITUDINE DEI TRIANGOLI E DEI POLIGONI.

46. *Le rette parallele che dividono in parti eguali uno dei lati d'un triangolo, dividono parimente in parti eguali un altro lato di questo triangolo, se sono nel medesimo tempo parallele al terzo lato.* (fig. 34)

Se gl' intervalli AB, BC, CD, ec. sono eguali, e che le rette BE, CF, DG,... siano parallele, gl' intervalli AE, EF, FG,... saranno parimente eguali. Per provarlo siano condotte alla retta AM le parallele Ex, Fy, Gz,... I triangoli ABE, ExF, FyG,... saranno eguali; poichè le linee Ex, Fy,... essendo respettivamente eguali a BC, CD,... come parallele comprese fra parallele, sono eguali fra loro (n° 31); di più gli angoli BAE, xEF... sono eguali come corrispondenti; finalmente gli angoli ABE, ExF,... sono pure eguali, perchè hanno l' apertura diretta nel medesimo senso ed i lati paralleli (n.° 32). I triangoli dei quali si tratta hanno adunque, respettivamente un lato eguale adiacente a due angoli eguali; dunque sono eguali; dunque $AE = EF = FG =$ ec.

Concludiamo da ciò che qualunque siasi il rapporto delle due linee AB, AE, i loro multipli respettivi AD, AG saranno nel medesimo rapporto; cioè che avremo

$$AB : AE :: AD : AG :: n \times AB : n \times AE,$$

essendo n un numero intero qualunque.

(fig. 35) Dunque se nel triangolo ABC, una retta DE condotta parallelamente ad AC divide il lato AB in due parti BD, AD commensurabili, questa retta dividerà anche la linea BC nel medesimo rapporto.

In generale qualunque sia il rapporto di BD ad AD, avremo sempre

$$BD : AD :: BE : EC$$

oppure $$AB : BD :: BC : BE;$$

ma supponghiamo che si abbia al contrario

$$AB : BD :: BC : BF.$$

Se si divide BC in un numero di parti eguali bastantemente grande, in modo che un punto di divisione I cada

fra E ed F, e che per il punto I si conduca la retta IK parallela ad AC, avremo in virtù della commensurabilità

$$AB : BK :: BC : BI;$$

ora da questa proporzione e dalla precedente necessariamente ne deriva

$$BD : BK :: BF : BI;$$

la quale non può sussistere, poichè BD essendo minore di BK, bisognerebbe che BF fosse minore di BI, ed al contrario gli è maggiore. Il quarto termine della proporzione ipotetica non può dunque essere maggiore di BE: si dimostrerebbe parimente che non può essere minore; dunque $BF = BE$, dunque ec.

È necessario dimostrare la proposizione reciproca, cioè, dimostrare che *se due lati d'un triangolo sono tagliati da una retta in parti proporzionali, questa retta sarà parallela al terzo lato.*

47. Si chiamano *triangoli simili*, quelli che hanno gli angoli respettivamente eguali ed i lati omologhi proporzionali. Per lati *omologhi*, s'intendono quelli che hanno la medesima posizione in queste figure, e che sono adiacenti ad angoli eguali; questi angoli si chiamano loro stessi *angoli omologhi*.

48. *Due triangoli equiangoli hanno i lati omologhi proporzionali, e per conseguenza sono simili.* (fig. 36)

Prendiamo su' lati AC, CB del triangolo maggiore, le parti Ca', Cb', respettivamente eguali ai lati ca, cb del triangolo minore, e si conduca la retta $a'b'$. Il triangolo $a'Cb'$ sarà eguale al triangolo acb, avendo tanto l'uno che l'altro un angolo eguale compreso fra lati respettivamente eguali, poichè per ipotesi i triangoli ACB, acb sono equiangoli. Così la retta $a'b'$ sarà eguale ad ab e parallela ad AB, e per il teorema precedente si avrà,

$$AC : CB :: ac : cb;$$

Dunque quando due triangoli sono equiangoli, i loro lati omologhi sono proporzionali.

49. *Due triangoli che hanno i lati paralleli sono dunque simili, poichè sono equiangoli* (n.° 32).

Nella stessa guisa si proverebbe, che due triangoli che hanno un angolo eguale compreso fra lati proporzionali, sono simili.

50. *Quando due triangoli hanno i lati omologhi proporzionali, questi triangoli sono simili.* (fig. 37)

Digitized by Google

Supponghiamo che nei triangoli ABC, abc, si abbia

$$AB : ab :: AC : ac :: BC : bc;$$

si tratta di provare che $A = a$, $B = b$, $C = c$. Si costruirà perciò il triangolo abd equiangolo al triangolo ACB, in modo che si abbia l' angolo $abd = B$, e l'angolo $bad = A$. Allora per il teorema precedente, avremo

$$AB : ab :: AC : ad :: BC : bd;$$

ma per supposizione,

$$AB : ab :: AC : ac :: BC : bc;$$

dunque $ad = ac$, e $bd = bc$; dunque i due triangoli abd, acb sono eguali: ma il primo è equiangolo al triangolo ACB; dunque questi ed il triangolo acb sono equiangoli e simili.

Da ciò che precede risulta che per affermare che due triangoli sono simili, basta dire che hanno due angoli respettivamente eguali, o i lati omologhi proporzionali.

51. *Due triangoli sono simili, quando hanno i loro lati respettivamente perpendicolari.* (fig. 38)

Siano de, df, ef respettivamente perpendicolari ad AC, AB, BC. Nel quadrilatero $Cxey$, i quattro angoli vagliano insieme quattro angoli retti, e per ipotesi gli angoli in x ed y sono retti: dunque i due rimanenti C, dey equivalgono a due angoli retti; ma i due angoli dey, def equivalgono essi pure a due retti, dunque l' angolo $def = C$. Parimente si proverebbe che l' angolo $fde = A$, e che l' angolo $dfe = B$; dunque i due triangoli ACB, def che hanno i lati respettivamente perpendicolari sono equiangoli e per conseguenza simili.

È da osservarsi che i lati omologhi, sono quelli che sono perpendicolari fra loro; così se ne deduce subito

$$AB : df :: AC : de :: BC : ef.$$

Abbiamo supposto che un triangolo fosse racchiuso nell' altro; ma se questa circostanza non avesse luogo, si potrebbe immaginare un terzo triangolo def interno, i cui lati sarebbero paralleli a quelli del triangolo paragonato ad ABC, ed allora la dimostrazione precedente entrerebbe nel caso della figura attuale.

52. *Due parallele condotte a traverso a delle rette che partono da un medesimo punto, sono tagliate in parti proporzionali da quelle rette.* (fig. 39)

Se le rette BC, bc sono parallele, avremo $BD : bd :: DE : de :: EC : ec$; poichè essendo bd parallela a BD, il triangolo Abd è equiangolo ad ABD, e si ha la proporzione

$$BD : bd :: AD : ad;$$

per la stessa ragione i triangoli ADE, Ade essendo equiangoli, danno

$$DE : de :: AD : ad;$$

dunque a causa del rapporto comune $AD : ad$, si ha

$$BD : bd :: DE : de.$$

Similmente si troverebbe, che

$$DE : de :: EC : ec;$$

dunque la linea bc è divisa ai punti d, ed e, siccome la linea BC lo è ai punti D ed E.

Da ciò ne segue che se BC fosse diviso in parti eguali, la sua parallela bc sarebbe pure divisa in parti eguali.

53. *Se dall' angolo retto d' un triangolo rettangolo s' abbassa una perpendicolare sull' ipotenusa.* (fig. 40)

1.° *Questa perpendicolare dividerà il triangolo in due altri che gli saranno simili;*

2.° *Sarà media proporzionale fra i due segmenti dell' ipotenusa.*

3.° *Ogni lato dell' angolo retto del triangolo proposto, sarà medio proporzionale fra l' ipotenusa intiera ed il segmento adiacente.*

Il triangolo ABC è rettangolo in A, e la perpendicolare AD abbassata dal punto A sull' ipotenusa BC, dividerà questo triangolo in due altri triangoli simili fra loro ed al triangolo grande: poichè gli angoli b, c, vagliono presi insieme un angolo retto, come pure gli angoli b, C, si ha necessariamente $C = c$; per la stessa ragione $B = b$; dunque i due triangoli ACD, ADB sono equiangoli fra loro ed al triangolo ACB, dunque sono simili. Così paragonando i lati omologhi dei due primi, avremo

$$CD : AD :: AD : DB,$$

cioè che la perpendicolare AD è media proporzionale fra i due segmenti CD, BD dell' ipotenusa.

Paragonando inoltre i lati omologhi dei due triangoli simili ACB, ACD, avremo

$$CD : AC :: AC : BC: \qquad (1);$$

egli è evidente che avremo ancora,

$$BD : AB :: AB : BC. \qquad (2).$$

Dunque uno dei lati dell' angolo retto d' un triangolo rettangolo, è medio proporzionale fra l' intiera ipotenusa ed il segmento adiacente.

Dalle due proporzioni (1) e (2) se ne deduce

$$\overline{AB}^2 = BC \times BD; \ \overline{AC}^2 = BC \times CD$$

aggiungendo membro per membro queste due equazioni, viene

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BC \times BD + BC \times CD$$
$$= BC\,(BD + CD);$$

ma $BD + CD = BC$ dunque $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$;

cioè che *la somma delle seconde potenze o dei quadrati dei lati che comprendono l' angolo retto, è eguale alla seconda potenza o al quadrato dell' ipotenusa.*

Giungeremo in seguito a questa proposizione importante, con un metodo indipendente dalla similitudine dei triangoli.

Delle proprietà del circolo.

54. *Le parti di due corde che si tagliano nel circolo, sono reciprocamente proporzionali.* (fig. 41)

I triangoli AED, CEB sono simili, poichè sono equiangoli. In fatti gli angoli in E sono eguali come essendo opposti al vertice; e gli angoli A, C sono pure eguali, perchè hanno ciascuno per misura la metà dell' arco BD; così i lati omologhi di questi triangoli danno

$$AE : EC :: ED : EB:$$

dunque le parti d' una corda formano gli estremi d'una proporzione, e le parti dell'altra ne formano i medii.

(fig. 42) Se una delle corde, AB per esempio, fosse un diametro, e che l'altra corda CD gli fosse perpendicolare, si avrebbe evidentemente $EC = ED$; dunque la proporzione precedente diverrebbe,

$$AE : EC :: EC : EB \text{ d' onde } \overline{EC}^2 = AE \times EB.$$

Ne segue da ciò, che *ogni perpendicolare al diametro, è media proporzionale fra i due segmenti che forma sopra questo diametro;* proprietà che deriva pure imme-

diatamente da quella del triangolo rettangolo ACB (n.° precedente). Questo medesimo triangolo fa inoltre conoscere che la *corda* AC *è media proporzionale fra il diametro* AB *ed il segmento adiacente* AE.

55. *Se da un punto preso fuori d' un circolo, si conducono due seganti terminate alla parte concava della circonferenza; queste seganti intiere saranno reciprocamente proporzionali alle loro parti esterne.* (fig. 43)

I triangoli ABD, EBC hanno un angolo comune in B. Di più $A = C$ (n.° 40); dunque questi triangoli sono simili (n.° 48), ed i loro lati omologhi danno,

$$AB : BC :: BD : BE.$$

Una delle seganti intiera e la sua parte fuori del circolo sono adunque gli estremi d' una proporzione, mentre che l' altra segante e la sua parte esterna ne formano i medii.

56. *Ogni tangente al circolo, è media proporzionale fra la segante intera e la sua parte esterna.* (fig. 44)

I triangoli ACB, ADB sono simili, poichè hanno un angolo comune in B, di più l'angolo inscritto C, e l'angolo BAD formato da una tangente e da una corda, hanno ognuno per misura la metà dell'arco AD (n.i 40 e 41); dunque,

$$BC : AB :: AB : BD; \text{ d'onde } \overline{AB}^2 = BC \times BD.$$

Delle proprietà dei poligoni regolari inscritti e circoscritti al circolo, e del rapporto approssimato del diametro alla circonferenza.

57. Due poligoni qualunque sono *simili*, quando hanno gli angoli respettivamente eguali, ed i lati omologhi proporzionali.

58. *Due poligoni regolari d' un medesimo numero di lati, sono figure simili.* (fig. 45)

Prendiamo per esempio i due esagoni regolari $ABCDEF$, $abcdef$. La somma degli angoli essendo la medesima nell' una e nell'altra figura, ed essendo eguale ad otto angoli retti (n.° 44), l' angolo BAF è il sesto di questa somma, come pure lo è baf; dunque $BAF = baf$: l' istesso succede degli altri angoli de' poligoni; questi poligoni sono dunque equiangoli. Di più poichè per la natura di queste figure $AB = BC = \ldots$, ed $ab = bc = \ldots$, è chiaro che si avrà la proporzione,

$$AB : ab :: BC : bc :: CD : cd :: \text{ec.}$$

Dunque i due poligoni di cui si tratta hanno gli angoli eguali ed i lati omologhi proporzionali; sono dunque simili.

Da questa serie di rapporti eguali, se ne deduce questa nuova proporzione,

$$AB + BC + CD \ldots + AF : ab + bc + cd \ldots + af :: AB : ab;$$

dunque i *perimetri* o contorni di due poligoni regolari d'un medesimo numero di lati, stanno fra loro come i loro lati omologhi.

59. *Ogni poligono regolare può essere inscritto e circoscritto al circolo.*

Supponghiamo che il punto O sia il centro del circolo la cui circonferenza passa per i tre punti A, B, C; si tratta di provare ch'essa passerà nel medesimo tempo per i punti D, E. Per provarlo, abbassiamo la perpendicolare OH sopra BC; allora i quadrilateri $OHCD$, $OHBA$ saranno eguali, perchè se si piega la figura $ABCD$ secondo OH, il punto C caderà in B, poichè $BH = CH$, ed a causa dell'eguaglianza degli angoli del poligono, il lato CD coinciderà con AB, e la retta OD con AO. Ma AO è un raggio; dunque OD ne è uno pure; dunque finalmente la circonferenza che passa per A, B, C, passa pure per D.

Con un ragionamento simile si proverebbe, che questa circonferenza deve passare per il punto E; e così di seguito; dunque ogni poligono regolare è inscrivibile in un circolo.

In secondo luogo è evidente, che tutte le perpendicolari, tali che OH, abbassate dal centro O del poligono sopra i suoi lati, sono eguali; dunque se dal punto O come centro, e col raggio OH, si descrive una circonferenza, essa toccherà tutti i lati del poligono, ognuno nel suo mezzo, ed il poligono sarà circoscritto a questa circonferenza.

Il raggio del circolo inscritto si chiama anche *apotema* del poligono.

Da ciò ne segue che i *perimetri di due poligoni regolari d'un istesso numero di lati, sono proporzionali ai raggi dei circoli inscritti, o circoscritti*, poichè questi perimetri stanno fra loro come i lati omologhi AB ed ab, e questi lati sono proporzionali ai raggi OB ed ob, o OH ed oh.

Digitized by Google

60. *Due poligoni simili sono composti d'uno stesso numero di triangoli respettivamente simili, e similmente disposti.* (fig. 46)

I poligoni simili $ABC\ldots\ abc\ldots$ sono evidentemente composti d'un medesimo numero di triangoli disposti nella stessa guisa. Di più il triangolo T è simile al triangolo t, avendo ognuno un angolo eguale compreso fra lati proporzionali; così l'angolo $EBC = ebc$; si ha dunque,

$$AB : ab :: BE : be;$$

d'altronde,

$$AB : ab :: BC : bc;$$

dunque,

$$BE : be :: BC : bc;$$

Dunque il triangolo T' e simile al triangolo t' (n.° 49). Parimente si proverebbe che T'' e t'' sono simili; dunque, ec.

61. *Il lato dell'esagono regolare inscritto, è eguale al raggio.* (fig. 45)

Infatti *l'angolo al centro* AOB, è il sesto di 4 angoli retti, o i $\frac{2}{3}$ d'un angolo retto preso per unità di misura. I due altri angoli eguali ABO, BAO, del medesimo triangolo, vagliono dunque insieme $2 - \frac{2}{3}$ ossia $\frac{4}{3}$; così ognuno eguale $\frac{2}{3}$ d'un retto. Dunque il triangolo AOB è equilatero; dunque il lato dell'esagono inscritto è eguale al raggio.

62. *Il lato del decagono regolare, è eguale alla parte maggiore del raggio del circolo circoscritto, diviso in media ed estrema ragione.* (fig. 47)

Una linea vien detta divisa in *media ed estrema ragione*, quando la sua parte maggiore è media proporzionale fra l'altra parte e la linea intiera.

Ciò posto sia AB, il lato del decagono regolare. Allora l'angolo O è il $\frac{1}{10}$ di 4 angoli retti, o i $\frac{2}{5}$ d'un solo; ed in virtù del n.° 43, resta per gli altri due angoli eguali A, OBA, $2 - \frac{2}{5}$ d'un retto, o $\frac{8}{5}$: ciò che dà per ognuno $\frac{4}{5}$. Adesso se si divide l'angolo OBA in due parti eguali colla retta BM, il triangolo ABM sarà evidentemente simile al triangolo ABO, e di più il triangolo BMO isoscele: si avrà così $AB = BM = MO$. Ma la similitudine dei triangoli ABO, ABM, dà

$$AO : AB :: AB : AM$$

dunque

$$AO : OM :: OM : AM,$$

Digitized by Google

dunque il raggio AO è diviso al punto M, in media ed estrema ragione; dunque finalmente, il lato AB del decagono regolare è eguale ad MO, cioè al maggiore dei due segmenti.

63. *Ogni linea curva o poligona che circonda da un' estremità all' altra una linea convessa, è più lunga della linea circondata.* (fig. 48)

S' intende per *linea convessa*, ogni linea che non può essere tagliata che in due punti da una retta.

Sia AMB, questa linea convessa. Se non è più piccola di tutte quelle che la circondano, esisterà fra quest'ultime, una linea più corta di tutte le altre, e che sarà minore di AMB, o tutt'al più eguale ad AMB. Sia $ACDB$ questa linea circondante: fra queste due linee conducete ad arbitrio la retta EF che non incontri punto AMB, o che non faccia che toccarla. Questa retta essendo più corta di $ECDF$, ne segue che la nuova linea circondante $AEFB$ è minore della prima $ACDB$. Ma per ipotesi questa qui dev' essere la più corta di tutte; dunque quest' ipotesi non può sussistere; dunque tutte le linee circondanti sono più lunghe di AMB.

Da ciò ne segue; 1.° che si può trovare una linea circondante che differisca poco quanto si vorrà dalla linea circondata; 2.° che si può circoscrivere ad un circolo un poligono regolare, l' eccesso del cui perimetro sulla circonferenza, o l' eccesso della superficie del poligono su quella del circolo, sia minore d' ogni quantità data. Il circolo è adunque il *limite* dei poligoni circoscritti: lo è pure dei poligoni inscritti.

64. *Le circonferenze dei circoli stanno fra loro come i diametri.*

1.ª *Dimostrazione.* Se per P e P' s' indicano i perimetri dei poligoni simili, respettivamente circoscritti ai circoli i cui raggi sono R, R', avremo per quello che precede,

$$\frac{P}{P'} = \frac{R}{R'};$$

di più se si concepisce che il numero dei lati di questi poligoni sia grande abbastanza, perchè le differenze fra i loro perimetri e la circonferenza del circolo a cui ognuno d' essi è circoscritto, siano al disotto d'ogni grandezza assegnabile, la differenza del rapporto $\frac{C}{C'}$ delle circonfe-

renze, al rapporto $\frac{P}{P'}$ dei contorni dei poligoni, potrà essere ridotta a tal grado di piccolezza che si vorrà. Questa differenza essendo quella pure dei rapporti invariabili $\frac{C}{C'}$ e $\frac{R}{R'}$, poichè $\frac{P}{P'}=\frac{R}{R'}$, ne segue che la differenza fra questi due ultimi rapporti è al disotto d' ogni grandezza data: questi rapporti sono dunque eguali; dunque finalmente,

$$\frac{C}{C'}=\frac{R}{R'}, \text{ ossia } C : C' :: R : R' :: D : D'.$$

2.ª *Dimostrazione*. Ecco un' altro modo di dimostrare questa proposizione, allorquando s' introduce l' idea dell' infinito nella geometria.

Immaginando due poligoni simili circoscritti ai due circoli, e dei quali il numero dei lati infinitamente piccoli sia infinito, cioè sia maggiore d' ogni qnantità assegnabile, i contorni di questi poligoni differiranno infinitamente poco dalle circonferenze corrispondenti, o ciò che è per così dire lo stesso, s' identificheranno con queste circonferenze. Si possono adunque prendere i perimetri di questi poligoni per le circonferenze stesse dei circoli; ma per il teorema del n.° 59, questi perimetri stanno fra loro come i raggi dei circoli circoscritti; dunque ec.

Da ciò risulta che il rapporto della circonferenza al diametro è lo stesso in tutti i circoli. Se dunque π indica questo rapporto, o ciò che torna lo stesso, la circonferenza d' un circolo il cui diametro $=1$, avremo in generale,

$$1 : \pi :: 2R : C,$$

ovvero $$C=2\pi R, \text{ ed } R=\frac{C}{2\pi}.$$

Per mezzo di queste formule si calcola la circonferenza C d' nn circolo, quando è noto il raggio R, o si calcola il suo raggio, quando la sua circonferenza è data.

Secondo *Archimede*, il rapporto $\pi=\frac{22}{7}$ all' incirca almeno; cioè, che se il diametro d' un circolo $=7$, la sua circonferenza è abbastanza esattamente 22. Questo geometra per determinare questo rapporto approssimativo, inscrisse e circoscrisse al circolo un poligono regolare di 96 lati, partendo dall' esagono il cui lato è eguale al raggio del circolo circoscritto; e trovò per risultamento che la circonferenza di questo circolo era $< 3\frac{10}{70}$ e $> 3\frac{10}{71}$,

ciò che dà infatti il rapporto di 1 : 3 $\frac{1}{7}$ ossia 7 : 22. Si sono trovati quindi dei rapporti molto più approssimati, e quello di *Mezio* è uno di quelli, poichè valutato in decimali dà $\frac{355}{113}$ = 3,1415929, risultamento vero fino alla sesta cifra decimale. Nei calcoli che non esigono una grande precisione, non si fa uso che di quest' ultimo rapporto ridotto a questo qui, $\pi = 3{,}14$.

65. La determinazione del rapporto prossimo della circonferenza al diametro, esige che si sappiano risolvere i due problemi seguenti.

1.° Problema. *Essendo data la corda d' un arco, trovare la corda della sua metà.*

Sia $AB = a$, la corda data; $AB' = a'$, la corda cercata; ed $AC = r$ il raggio del circolo noto. (fig. 49)

In virtù del n.° 54, AB' è media proporzionale fra il diametro $B'D$ ed il segmento $B'M$ adiacente; così

$$a'^2 = 2r \times B'M;\ \text{ma}\ B'M = r - CM = r - \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}},$$

poichè $\overline{CM}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AM}^2$, (n.° 53); dunque.

$$a'^2 = 2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}\right) = 2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2};$$

dunque

$$a' = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}}.$$

Se si suppone il raggio = 1, si ha semplicemente.

$$a' = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}}.$$

Per l' applicazione consideriamo a come il lato dell' esagono regolare inscritto; nel qual caso $a = 1$ (n.° 61) ed a' eguale al lato del dodecagono regolare. Si ha dunque,

$$a' = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 0{,}51763809;$$

per conseguenza se a'' indica il lato del poligono regolare di 24 lati, avremo indicando d' altronde $\frac{1}{2}\sqrt{4 - a'^2}$ per r';

$$a'' = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a'^2}} = \sqrt{2 - 2r'} = 0{,}26105238,$$

e così di seguito fino al poligono di 96 lati il cui lato è

$$a^{IV} = 0{,}06543817,$$

ed il perimetro $96a^{IV} = 6{,}282064$.

2.° Problema. *Essendo dato il perimetro d'un poligono regolare inscritto in un circolo noto, trovare il perimetro d'un poligono simile circoscritto.* (fig. 49)

Poichè $\frac{1}{2}\sqrt{4 - a'^2} = r'$ è l'apotema del dodecagono rogolare inscritto, $\frac{1}{2}\sqrt{4 - a^{IV 2}} = r^{IV}$ sarà l'apotema del poligono di 96 lati. Ma il raggio AC del circolo $AB'B$, è l'apotema di tutti i poligoni circoscritti: se dunque A^{IV} è il lato del poligono circoscritto di 96 lati, avremo (n.° 59),

$$r^{IV} : 1 :: 96a^{IV} : 96A^{IV} = \frac{96a^{IV}}{r^{IV}} = 6{,}285429;$$

d'onde,

$$\tfrac{1}{2} \text{ circ: } AC = \frac{96a^{IV} + 96A^{IV}}{4} = 3{,}1418,$$

rapporto esatto almeno ai 3 diecimillesimi circa.

CAPITOLO III.

DELL' AREA DEI POLIGONI, E DI QUELLA DEL CIRCOLO.

66. Si chiama *area* la superficie d'una figura qualunque, considerata rapporto alla sua grandezza.

Due figure di forme diversissime, e che hanno delle aree eguali, sono dette *equivalenti;* e due figure simili che possono essere soprapposte, si dicono *eguali.*

Misurare una superficie, significa cercare quante volte essa contiene un' altra superficie presa per unità di misura. L' unità di misura è il quadrato.

(fig. 50) L'*altezza* d'un triangolo è la perpendicolare abbassata dal vertice d'uno dei suoi angoli sul lato opposto che chiamasi la *base.* Il vertice dell' angolo opposto alla base, chiamasi il *vertice* del triangolo.

(fig. 51) L'*altezza* d'un parallelogrammo, è la perpendicolare che misura la distanza di due lati opposti, denominati *basi.*

(fig. 52) L'*altezza* del trapezio, è la perpendicolare compresa fra le sue due *basi* ossia fra i lati paralleli.

Digitized by Google

67. *I parallelogrammi che hanno basi eguali ed altezze eguali sono equivalenti.* (fig. 53)

Siano i parallelogrammi $ABCD$, $ABEF$, della medesima base AB e della medesima altezza DX; è chiaro per la natura di queste figure, che i lati AB, DC sono eguali fra loro, come pure i lati BE, AF (n.° 31). È inoltre evidente che se, dalle linee eguali DC, FE si toglie la parte comune CF, i resti DF, CE saranno eguali, così i due triangoli ADF, BCE sono fra loro equilateri, e conseguentemente eguali.

Ora se dal quadrilatero $ABED$, successivamente si tolgono i triangoli eguali BCE, ADF, i resti $ABCD$, $ABEF$ saranno equivalenti, dunque, ec.

Donde ne segue che *ogni parallelogrammo è equivalente ad un rettangolo della medesima base e della medesima altezza.*

68. (fig. 54) *Ogni triangolo è la metà d'un parallelogrammo della stessa base e della medesima altezza.*

Infatti i triangoli ABC, ADC sono eguali avendo i tre lati respettivamente eguali. Si può dunque dire, 1.° che un triangolo è la metà d'un rettangolo della stessa base e della medesima altezza; 2.° che tutti i triangoli che hanno basi eguali ed altezze eguali, sono equivalenti.

69. (fig. 55) *Due rettangoli della medesima altezza stanno fra loro, come le loro basi, e reciprocamente.*

Siano i due rettangoli $ABDC$, $EFGH$ che abbiano la medesima altezza AC. Se si suppone che una linea m, considerata come unità di misura lineare, sia contenuta 5 volte nella base AB, e 3 volte nella base EF, e che per tutti i punti di divisione x, y..., p, q, s'alzino delle perpendicolari xx' yy',... pp', qq', i rettangoli Ax', xy', ... Ep', pq' ... saranno eguali. Adesso i rettangoli AD, EH contengono respettivamente tante volte uno dei rettangoli parziali, quante volte le loro basi AB, EF contengono la linea m; dunque poichè queste basi sono nel rapporto commensurabile di 5 : 3, i rettangoli AD, EH sono pure nel medesimo rapporto. È evidente che la stessa cosa sarebbe per ogni altro rapporto della medesima specie. Inoltre la proposizione sarebbe anche vera, se le basi dei rettangoli fossero in un rapporto incommensurabile; e per provarlo si può seguire il processo della dimostrazione dei numeri 38 e 46, cioè la *riduzione all'assurdo*; dunque in generale,

$$ABDC : EFHG :: AB : EF.$$

70. *Due rettangoli qualunque stanno fra loro come i prodotti delle loro basi per le altezze.* (fig. 56)

Supponghiamo che le basi dei due rettangoli *ABCD*, *BEFG* siano contigue, e sulla medesima linea retta *AE*, e che si sia costruito il rettangolo grande *ADHE*. I due rettangoli *AC*, *BH* avendo la medesima altezza *AD*, stanno fra loro come le loro basi. Parimente i rettangoli *BH*, *BF* avendo la medesima base, stanno fra loro come le loro altezze; così da una parte.

$$ABCD : BEHC :: AB : BE;$$

e dall' altra,

$$BEHC : BEFG :: BC : BG.$$

Moltiplicando queste due proporzioni per ordine, ed omettendo il fattore comune, avremo

$$ABCD : BEFG :: AB \times BC : BE \times BG;$$

ciò che prova la proposizione enunciata.

Quando il rettangolo *BEFG* è un quadrato, si prende comunemente il suo lato *BE* per unità di misura lineare, allora la proporzione precedente diviene

$$ABCD : BEFG :: AB \times BC : 1.$$

Se le linee adunque *AB* e *BC* sono misurate colla medesima unità *BE*, il prodotto $AB \times BC$ esprimerà il numero delle volte che l' unità della superficie, o il quadrato *BEFG* è contenuto nel rettangolo *ABCD*. Per abbreviare l' espressioni, si dice che l' *area d' un rettangolo è eguale al prodotto della sua base per la sua altezza.*

(fig. 57) Per meglio fissare le idee su questo particolare supponghiamo $AB = 5$ metri, e $BC = 3$ metri; l'area del rettangolo *ABCD* starà al quadrato $BEFG :: 3 \times 5 : 1$, o più semplicemente, l'area del rettangolo sarà di 15 metri quadrati.

Il solo esame della figura dimostra ad un tratto, che quando la base e l' altezza d' un rettangolo sono commensurabili, questo rettangolo ha infatti per misura, il prodotto della sua base per la sua altezza.

Qualunque siasi l' unità di misura lineare, segue da quello che abbiamo detto, che l' area d' un quadrato è eguale al quadrato del suo lato.

71. *L' area d' un parallelogrammo qualunque è eguale al prodotto della sua base per la sua altezza.* (fig. 58)

Digitized by Google

Poichè il parallelogrammo $ABCD$ è equivalente al rettangolo $ABFE$, che ha la medesima base AB e la medesima altezza AE. Dunque $AB \times AE$ è la misura dell' area del parallelogrammo $ABCD$.

72. *L' area d' un triangolo è eguale al prodotto della sua base per la metà della sua altezza.* (fig. 54)

Poichè il triangolo ABC è la metà del parallelogrammo $ABCD$, che ha la medesima base AB e la medesima altezza DE; dunque $\frac{AB \times DE}{2}$ è l' espressione dell' area del triangolo ABC.

73. *L' area d' un trapezio è eguale alla sua altezza moltiplicata per la semisomma delle sue basi parallele.* (fig. 59)

Il trapezio $ABCD$ è composto di due triangoli ACB, ACD: ora il primo ha per misura $\frac{AB \times DE}{2}$; ed il secondo $\frac{DC \times DE}{2}$; dunque l'area del trapezio $ABCD = \left(\frac{AB + CD}{2}\right) \times DE$.

Se per il mezzo H della diagonale AC, si conduce IK parallela alle basi AB, CD del trapezio, è chiaro che si avrà $HK = \frac{AB}{2}$, $IH = \frac{CD}{2}$ (n.° 48); dunque $IK = \frac{AB + CD}{2}$, dunque l' area d' un trapezio è pure eguale al prodotto della linea che unisce il mezzo dei due lati non paralleli, moltiplicata per l' altezza di questo trapezio.

74. *L' area d' un poligono regolare è eguale alla metà del prodotto del suo contorno per il suo apotema.* (fig. 45)

Siccome tutti i triangoli AOB, BOC, ... sono eguali, l' area del poligono regolare $ABCD$.... è eguale a quella del triangolo AOB, moltiplicata per il numero dei lati di questo poligono. Ora, l' area $AOB = \frac{AB \times OH}{2}$; dunque per il caso della figura, l' area del poligono $= 6AB \times \frac{OH}{2}$. Ma $6AB$ è il perimetro, ed $\frac{OH}{2}$ è la metà dell' apotema o del raggio del circolo inscritto; dunque l' area d' un poligono regolare, qualunque siasi il numero dei suoi lati, è tale come l' enunciato del problema lo porta.

In generale, l' area d' un poligono qualunque circoscritto ad un circolo, è eguale al prodotto del suo contorno per la metà del raggio di questo circolo.

Digitized by Google

75. *L'area d'un circolo è eguale al prodotto della sua circonferenza per la metà del suo raggio.*

1.ª *Dimostrazione*. Faremo dipendere la dimostrazione di questo teorema, da questo principio incontrastabile, cioè; che se una grandezza variabile X, ha per limiti due altre grandezze costanti, A e B, ognuna minore d' X, queste sono necessariamente eguali.

Adesso, poichè secondo il teorema del n.° 63, si può concepire un poligono regolare, ed anche irregolare, circoscritto ad un circolo d' un raggio R, in modo che il perimetro P di questo poligono, differisca tanto poco quanto si vorrà dalla circonferenza C, l' eccesso del prodotto $P \times \frac{1}{2} R$ sul prodotto invariabile $C \times \frac{1}{2} R$, potrà essere al disotto d' ogni quantità assegnabile. Da un altro canto l' area del medesimo poligono, sempre maggiore di quella del circolo, può approssimarsi a quest' ultima quanto si vorrà. I prodotti $\frac{1}{2} PR$, $\frac{1}{2} CR$, e l' area del circolo, sono dunque tre quantità che si trovano assolutamente nelle medesime circostanze della grandezza variabile X, e le due altre grandezze A e B; dunque il prodotto $\frac{1}{2} CR$ è la vera misura della superficie del circolo.

2.ª *Dimostrazione*. Quando si vuol fare uso della considerazione dell' infinito, si dimostra questo teorema come segue.

Se si concepisce un poligono regolare circoscritto, d'un numero infinito di lati, il suo perimetro differirà infinitamente poco dalla circonferenza del circolo. Si può adunque sostituire questo poligono a questo circolo. Dunque (n.° 74) l' area d' un circolo è eguale alla sua circonferenza moltiplicata per la metà del suo raggio.

Indichiamo per π la circonferenza d' un circolo il cui diametro $= 1$; per R il raggio, e per C la circonferenza d' un altro circolo; avremo (n.° 64),

$$C = 2\pi R.$$

Ora l' area del Circolo $= \frac{1}{2} CR$, dunque $\frac{1}{2} CR = \pi R^2$; vale a dire, che l' area d' un circolo è pure eguale al prodotto del quadrato del suo raggio per il rapporto della circonferenza al diametro.

76. *L'area d'un settore circolare è eguale al prodotto del suo arco per la metà del suo raggio.* (fig. 18)

Egli è infatti evidente che il settore $ACBM$ sta al circolo intiero, come l' arco AMB sta all' intiera circonfe-

renza, ossia come arc. $AB \times \frac{1}{2} AC$: circ. $AC \times \frac{1}{2} AC$. Ma l'area del circolo = circ. $AC \times \frac{1}{2} AC$ (n.° precedente); dunque l'area del settore $ACBM$ = arc. $AB \times \frac{1}{2} AC$.

In quanto all' area del segmento AMB, si vede bene che è eguale a quella del settore $ACBM$ meno quella del triangolo ACB.

CAPITOLO IV.

PARAGONE DELLE AREE DELLE FIGURE SIMILI.

77. *Il quadrato costruito sull' ipotenusa d'un triangolo rettangolo, è eguale alla somma dei quadrati costruiti sopra i due altri lati.* (fig. 60)

Questa proposizione già provata al (n.° 53), si dimostra semplicissimamente come segue.

Sia il triangolo ACB, rettangolo in A, e sia costruito un quadrato sopra ogni lato. Se dal punto A si abbassa sopra FG la perpendicolare AE, e che si conducano le rette AF, BL, i triangoli ACF, BCL saranno eguali; poichè avranno un angolo uguale compreso fra lati respettivamente eguali. Infatti, l' angolo LCB = ang. ACF; lato CL = lato CA, e lato CB = lato CF. Ma il triangolo LCB è la metà del quadrato $ACLK$, avendo tanto l'uno che l' altro la medesima base e la medesima altezza; per la stessa ragione il triangolo ACF è la metà del rettangolo $CDEF$: dunque il quadrato AL è equivalente al rettangolo CE. Si proverebbe in egual modo che il quadrato AH è equivalente al rettangolo BE; dunque il quadrato CG è eguale al quadrato AH più il quadrato AL, che si traduce così:

$$\overline{CB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2.$$

Dunque il *quadrato d' uno dei lati dell' angolo retto è eguale al quadrato dell' ipotenusa meno il quadrato dell' altro lato*, cosa che si esprime così:

$$\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{AC}^2.$$

Questa formula risulta dall'essere l'area d'un quadrato, eguale al quadrato della sua base (n.° 70).

Dunque, *in un quadrato, il quadrato fatto sulla diagonale è doppio del quadrato fatto sopra al lato*, o ciò che è lo stesso, la diagonale sta al lato :: $\sqrt{2}$: 1. Così la *diagonale d'un quadrato è incommensurabile col suo lato.*

Le altre proprietà del triangolo rettangolo sono dimostrate nel numero citato precedentemente.

78. *In ogni triangolo il quadrato del lato opposto ad un angolo acuto, è eguale alla somma dei quadrati dei due altri lati, meno due volte il prodotto del lato su cui cade la perpendicolare, moltiplicato per il segmento adiacente a quest'angolo.* (fig. 61)

I triangoli ACD, DCB, essendo ambedue rettangoli, danno respettivamente,

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2, \text{ e } \overline{CD}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{BD}^2.$$

Se si sostituisce quest'ultimo valore di $\overline{CD}^2$ nella prima di $\overline{AC}^2$, s'otterrà,

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CB}^2 - \overline{BD}^2;$$

ma nella (fig. 61), il segmento $AD = AB - BD$, e nella (fig. 62) il segmento $AD = BD - AB$. Si ha dunque nell'uno e nell'altro caso,

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 - 2AB \times BD + \overline{BD}^2:$$

espressione che cangia il valore di $\overline{AC}^2$ nel seguente;

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2AB \times BD:$$

cosa che concorda colla proposizione enunciata.

79. *In un triangolo ottusiangolo, il quadrato del lato opposto all'angolo ottuso, è eguale alla somma dei quadrati dei due altri lati, più due volte il prodotto della base per il segmento adiacente a quest'angolo.* (fig. 62)

Per la medesima ragione del teorema precedente si ha,

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2, \text{ e } \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2,$$

d'onde si conchiude,

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2;$$

ma $$BD = AB + AD,$$

ovvero $$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + 2AB \times AD;$$

dunque $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2AB \times AD$;
siccome lo porta l'enunciato della proposizione.

80. *In un triangolo qualunque, se si conduce una retta dal vertice alla metà della base, il doppio della somma dei quadrati di questa retta e della metà della base, sarà eguale alla somma dei quadrati degli altri due lati.* (fig. 63)

Sia E il mezzo della base AB del triangolo ABC, e CD la sua altezza; il triangolo ECB darà per il teorema del (n.° 78),

$$\overline{CB}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{EB}^2 - 2EB \times ED,$$

ed il triangolo ACE darà per il teorema precedente,

$$\overline{AC}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{AE}^2 + 2AE \times ED;$$

dunque aggiungendo ed osservando che $AE = EB$, avremo

$$\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 = 2\overline{CE}^2 + 2\overline{AE}^2:$$

che è quello che si voleva dimostrare.

Da ciò facilmente si conchiude, che *in ogni parallelogrammo, la somma dei quadrati dei lati è eguale alla somma dei quadrati delle diagonali.*

81. I triangoli simili stanno fra loro come i quadrati dei loro lati omologhi. (fig. 61)

I triangoli ABC, abc essendo simili, si ha la proporzione,

$$AB : ab :: AC : ac;$$

parimente a causa dei triangoli equiangoli ACD, acd si ha

$$CD : cd :: AC : ac.$$

Moltiplicando per ordine queste due proporzioni viene

$$AB \times CD : ab \times cd :: \overline{AC}^2 : \overline{ac}^2.$$

Ma $AB \times CD$ è il doppio dell'area del triangolo ACB, ed $ab \times cd$ è pure il doppio dell'area del triangolo abc; dunque le aree dei triangoli simili stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi.

82. *Le superficie dei poligoni simili stanno fra loro come i quadrati dei loro lati omologhi, o delle loro linee omologhe.* (fig. 46)

Poichè i poligoni $ABCDE$, $abcde$ sono simili, sono composti d'un medesimo numero di triangoli T, T', T'', t, t', t'', respettivamente simili e disposti nella stessa guisa; si ha dunque in virtù del teorema precedente,

$$T : t :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2,$$

$$T' : t' :: \overline{BC}^2 : \overline{bc}^2,$$

$$T'' : t'' :: \overline{CD}^2 : \overline{cd}^2$$

Tutti questi rapporti sono eguali, poichè a causa della similitudine dei poligoni, si ha

$$AB : ab :: BC : bc, \text{ ec.}$$

ossia $$\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 :: \overline{BC}^2 : \overline{bc}^2, \text{ ec.}$$

Dunque la somma degli antecedenti $T + T' + T''$, ossia il poligono $ABCDE$, sta alla somma dei conseguenti $t + t' + t''$ ossia al poligono $abcde$, come un antecedente $\overline{AB}^2$ sta al suo conseguente $\overline{ab}^2$. Dunque ec.

83. *Le aree dei circoli stanno fra loro come i quadrati dei raggi, o dei diametri, o delle circonferenze.*

Si è veduto (n.° 75) che l'area S d'un circolo $= \pi R^2$, essendo R il raggio di questo circolo, e π il rapporto della circonferenza al diametro; per conseguenza per un altro circolo del raggio R', si ha $S' = \pi R'^2$; dunque da queste due eguaglianze se ne deduce la proporzione

$$S : S' :: \pi R^2 : \pi R'^2 :: R^2 : R'^2.$$

Ma il teorema del (n.° 64), dà

$$R : R' :: C : C'$$

ossia $$R^2 : R'^2 :: C^2 : C'^2,$$

e poichè i raggi stanno come i diametri, si ha inoltre

$$R^2 : R'^2 :: D^2 : D'^2;$$

dunque a causa dell' eguaglianza di questi rapporti,

$$S : S' :: D^2 : D'^2 :: C^2 : C'^2,$$

quello che bisognava dimostrare.

Digitized by Google

CAPITOLO V.

PROBLEMI DI GEOMETRIA RELATIVI ALLA TEORIA PRECEDENTE.

Soluzioni grafiche.

84. *Trovare il rapporto di due linee rette.* (fig. 64)

Misurare la distanza dei due punti, o la lunghezza d'una retta traceiata in terra o sulla carta, significa cercare quante volte questa retta ne contiene un' altra presa per unità. Quest' unità è assolutamente arbitraria. In Francia l'unità di misura delle lunghezze è il metro, che siccome sappiamo si divide in decimi, centesimi, ec. (1) Se si vuole conoscere adunque la distanza dal punto A al punto B sul terreno, si porterà il metro successivamente nella direzione AB, tante volte quante sarà possibile; e se si trova un resto, si valuterà nelle parti, di quest' unità.

S' indica la linea AB con biffe o pali dritti, che si ficcano verticalmente, ed in modo che la prima biffa esattamente nasconda tutte le altre; allora i piedi di tutte queste biffe sono sull' istessa linea retta, se il terreno è orizzontale o ha un solo pendìo: in generale sono sullo stesso piano verticale.

Da ciò si vede che il rapporto delle due linee è espresso da quello dei due numeri che indicano quante volte un' altra linea della medesima natura è contenuta nelle due prime. Per esempio una lunghezza $= 18^m,5$, ed un altra $= 5^m,25$: dunque queste due lunghezze stanno fra loro $:: 18,25 : 5,25 :: 1825 : 525 :: 74 : 21$.

Se le due linee fossero marcate sulla carta, si potrebbe trovare ancora il loro rapporto esatto o approssimato, col metodo che si segue in aritmetica, per trovare il massimo comune divisore di due numeri.

85. *I tre lati d' un triangolo essendo dati separatamente descrivere questo triangolo.* (fig. 65)

Le tre linee date sono m, n, p. Prendete $AB = m$; quindi dal punto A come centro e con un raggio eguale n, descrivete un arco xy: quindi dal punto B come centro, e con un raggio eguale p, descrivete un altro arco zt, in modo che tagli il primo in C: conducete final-

(1) In Toscana è per gli agrimensori la Canna che si divide in braccia; e per l'artiglieria è la Tesa Francese che si divide in piedi, ec.

mente le rette CA, CB, ed il triangolo ABC sarà quello che bisognava descrivere.

La costruzione sola fa vedere che gli archi xy, zt, non possono tagliarsi, e per conseguenza che il triangolo non può aver luogo, che allorquando la linea maggiore data è minore della somma degli altri due.

86. *Dividere una retta data in due parti eguali.* (fig. 66)

Dall' estremità della retta data AB, e con un raggio maggiore della metà di questa retta, descrivete due archi che si taglino in C ed in D; allora la retta CD sarà perpendicolare ad AB. Infatti i due punti C e D essendo egualmente lontani da A e da B, sono necessariamente sulla perpendicolare inalzata sul mezzo di AB (n.° 24); ma due punti determinano la posizione d' una retta; dunque CD divide la retta AB in due parti eguali.

87. *Per un punto dato sopra una linea, inalzare una perpendicolare su questa linea.* (fig. 67)

Prendete a destra e sinistra del punto C dato, due parti eguali CD, AC; e dai punti A, D come centri, con un raggio maggiore di AC descrivete due archi che si taglino in E: la retta CE sarà la perpendicolare richiesta. Poichè il punto E essendo per costruzione egualmente lontano da A e da B, appartiene alla perpendicolare inalzata sul mezzo di AD; dunque CE è questa perpendicolare.

88. *Da un punto dato fuori d' una retta, abbassare una perpendicolare su questa retta.* (fig. 61)

Dal punto C come centro, dato fuori della retta AB, e con un raggio bastantemente grande, descrivete un arco che tagli AB in due punti E ed F; quindi da questi punti come centri, e col medesimo raggio, se piace, descrivete due altri archi che si taglino in D; la retta CD sarà perpendicolare sul mezzo di EF, e per conseguenza sulla retta AB. In fatti i punti C, D, sono ognuno egualmente distanti da E e da F.

89. *Per un punto dato condurre una parallela ad una retta data.* (fig. 69)

Dal punto dato C preso per centro, e con un raggio CB bastantemente grande, descrivete un arco indefinito BD. Dal punto B come centro, e col medesimo raggio, descrivete l' arco CA; prendete $BD = AC$, e tirate la retta CD, che sarà la parallela richiesta.

Infatti per costruzione, gli angoli alterni interni BCD, ABC sono eguali, dunque le linee AB, CD sono parallele.

Ecco un altro mezzo di risolvere questo problema, e che è esatto abbastanza nella pratica.

(fig. 70) Dal punto C come centro si descrive l'arco xy tangente ad AB, e da un altro punto F preso sopra AB collo stesso raggio si descrive l'arco zt. Si pone quindi una riga il cui lembo passi per il punto C e sia tangente all'arco zt. La retta CD, determinata in questa guisa, sarà la parallela richiesta.

90. *Da un punto dato fuori d'una retta, condurre una linea che faccia colla prima un angolo dato.* (fig. 71)

Sia C il punto dato fuori della retta AB, ed M l'angolo dato. Per un punto D preso a volontà sopra AB, si tirerà una retta DE, in modo tale che l'angolo $EDB=M$; si condurrà quindi per il punto C una retta CH parallela a DE. Allora l'angolo CHD sarà eguale a EDB, ed il problema sarà risoluto.

91. *Dividere un angolo in due parti eguali.* (fig. 73)

Per dividere l'angolo BAC in due parti eguali, dal suo vertice A come centro e con un raggio preso ad arbitrio descrivete l'arco mn. Quindi dai punti m, n come centri, e con un raggio maggiore di $\frac{1}{2}$ mn, descrivete due archi che si taglino in D. Con questo mezzo, la retta AD dividerà l'angolo BAC in due parti eguali.

Infatti i due punti A, D sono ognuno egualmente lontani dall'estremità della corda mn; dunque la retta AD è perpendicolare sul mezzo di questa corda; dunque divide l'arco mEn e l'angolo BAC in due parti eguali.

Si può, colla medesima costruzione, dividere un arco in 4, 8, 16, ... ec., parti eguali.

92. *Condurre una perpendicolare all'estremità d'una retta senza prolungarla.* (fig. 74)

Prendete ad arbitrio un punto C nell'interno dell'angolo retto EAB. Da questo punto come centro, e con un raggio eguale ad AC, descrivete una circonferenza $ADHE$. Per il punto D, ove questa circonferenza taglia la retta AB, conducete il diametro DE, ed unite i punti A ed E: la retta AE sarà perpendicolare ad AB. Infatti l'angolo inscritto EAD ha per misura la metà della semicirconferenza EHD, quest'angolo è dunque retto (n.i 38 e 40).

Se si trattasse di risolvere lo stesso problema sul terreno, si farebbe nel modo seguente.

Ponetevi in qualche parte in C: tendete quindi una cordella d'una lunghezza AC, da C in D, di modo che

l' estremità *D* sia nella direzione *AB*. Tendete quindi la medesima cordella da *C* in *E*; nella direzione *CD*, indicata con biffe: allora la retta *AE* sarà la perpendicolare richiesta. Si vede bene che questa costruzione torna ad essere la precedente.

93. *Per un punto dato condurre una tangente ad un circolo.*

Se il punto *A* (fig. 19) è dato sulla circonferenza, conducete il raggio *AC*, ed alzate su questo raggio la perpendicolare *AB*, che sarà tangente al punto *A* (n.° 36).

Se il punto *A* è dato fuori della circonferenza, unite questo punto e il centro *C* del circolo dato (fig. 75); e sulla linea *AC* come diametro, descrivete la circonferenza *ABCB'*; le rette *AB*, *AB'* condotte dal punto dato alle intersezioni dei due circoli, saranno tangenti al primo circolo *CB*. Ciò è evidente poichè gli angoli *CBA*, *CB'A* sono retti ognuno (n.i 38 e 40).

I due triangoli *ABC*, *AB'C* essendo eguali, ne segue che gli angoli *BAC*, *B'AC* lo sono pure. Dunque affinchè un circolo tocchi i lati d' un angolo, bisogna che il suo centro sia sulla retta che divide quell' angolo in due parti eguali.

94. *Inscrivere un circolo in un triangolo.* (fig. 76)

Risulta dalla conseguenza dedotta dalla soluzione del problema precedente, che per inscrivere un circolo in un triangolo, bisogna dividere in due parti eguali due degli angoli di questo triangolo; perchè il punto d' intersezione delle due linee di divisione, sarà il centro del circolo cercato. In quanto al raggio *OK* di questo circolo, è chiaro che sarà eguale alla perpendicolare abbassata dal centro *O*, sopra uno dei lati *AC* del triangolo *ABC*.

95. *Fare passare una circonferenza per tre punti dati non in linea retta.* (fig. 77)

I punti dati essendo *A*, *B*, *C*, unitegli colle rette *AB*, *BC*; e sul mezzo d' ognuna, inalzate le perpendicolari *de*, *gf*. Il punto *O* d' intersezione di queste perpendicolari, sarà allora egualmente distante dai tre punti *A*, *B*, *C*, e sarà per conseguenza il centro del circolo cercato.

Non è difficile il provare che non si può fare passare che una sola circonferenza per i tre punti *A*, *B*, *C*; e si vede bene che se questi punti fossero in linea retta, il problema sarebbe impossibile.

Questa soluzione risolve anche il problema ove si tratta di fare passare una circonferenza per i vertici dei tre an-

goli d'un triangolo, oppure di trovare il centro d'un circolo o d'un arco.

(fig. 78) Se i tre punti A, B, C sono dati sul terreno, e che bisogni marcare una circonferenza per questi tre punti supposti molto lontani gli uni dagli altri, si misurerà con un grafometro (n.° 225) l'angolo ABC, e si scerranno altri punti, come B', d'onde gli oggetti A, C siano veduti sotto un medesimo angolo B, in modo cioè che si abbia $ABC = AB'C$. L'unione di tutti questi punti determinerà l'arco di circolo cercato, che si traccerà quindi liberamente. Per terminare la circonferenza, si scerranno parimente altri punti b, b' . . . . , in modo che ognuno degli angoli AbC, $Ab'C$ . . ., sia eguale all'eccesso di due angoli retti sull'angolo B'.

96. *Sopra una retta data descrivere un segmento capace d'un angolo dato.* (fig. 79)

Sia AB la retta data, e C l'angolo noto. Si tratta di descrivere su questa retta un arco AKB, che sia tale che tutti gli angoli inscritti K, K',... siano eguali all'angolo C.

Fate l'angolo $MAB = C$. Alzate AO perpendicolare ad AM, come pure OD perpendicolare sul mezzo di AB; ed il punto O, comune a queste due perpendicolari sarà il centro dell'arco richiesto AKB.

Infatti gli angoli MAB e K sono eguali, avendo ciascuno per misura la metà dell'arco AEB (n.i 40 e 41); ma per costruzione, $MAB = C$, dunque $K = C$.

Si vedrà l'uso di questa soluzione nella geodesia.

97. *Trovare una quarta proporzionale a tre linee date.* (fig. 80)

Le tre linee date sono m, n, p. Sul lato AX d'un angolo ad arbitrio A, portate a partire dal punto A, e l'una dietro l'altra, le due prime linee m ed n; sull'altro lato AY, portate a partire dal medesimo punto A, la terza linea p; unite l'estremità d'm e di p; e dall'estremità n, conducete DE parallelamente a BC. La parte EC sarà la quarta proporzionale cercata, poichè a causa delle parallele DE, BC, si ha $m : n :: p : x$.

Nella stessa guisa si trova una terza proporzionale a due linee date A e B; poichè essa è la stessa della quarta proporzionale alle tre linee date A, B, B.

98. *Dividere una linea data in tante parti eguali, quante se ne vorranno.* (fig. 81)

Sia proposto il dividere la linea AB in cinque parti eguali. Dall'estremità A, conducete la retta indefinita AC,

e portate sopra questa retta cinque volte la lunghezza qualunque A 1; unite l'ultimo punto di divisione C e l'estremità B della retta AB; conducete D 1 parallela a BC, ed allora AD sarà la quinta parte di AB (n.° 46).

Questo processo può in diversi modi variarsi: eccone un altro esattissimo nella pratica.

(fig. 82) Sia sempre AB la linea da dividere. Conducete ad arbitrio la retta indefinita BD, e per il punto A la retta AE parallela a BD. Portate sopra ognuna di queste parallele cinque parti eguali, ed unite tutti i punti di divisione corrispondenti colle rette AD, (1) (4), (2) (3),... le quali essendo parallele ed equidistanti divideranno AB in cinque parti eguali.

99. *Per un punto preso nell'interno d'un angolo dato, condurre una retta in modo che le parti comprese fra questo punto e i due lati dell'angolo siano eguali.* (fig. 83)

Sia D il punto dato nell'interno dell'angolo BAC. Per questo punto, conducete DE parallela ad AB; prendete $EF = AE$, e conducete la retta FDG, che sarà necessariamente divisa in due parti eguali al punto D (n.° 46).

100. *Sopra una retta data costruire un triangolo simile ad un triangolo dato.* (fig. 61)

Sia ACB il triangolo dato. Si tratta di costruire sopra ab, il triangolo abc simile al primo. Perciò fate l'angolo $a = A$, e l'angolo $b = B$ (n.° 89). Le rette ac, bc s'incontreranno in un punto c, che sarà l'omologo di C, ed il problema sarà risoluto.

Si potrebbe, ma in un modo meno semplice, costruire il triangolo abc simile ad ABC, cercando prima una quarta proporzionale alle tre linee AB, AC, ab, e quindi una quarta proporzionale alle tre linee AB, BC, ab: si conoscerebbero allora i tre lati del triangolo abc, che si costruirebbe col metodo del (n.° 85).

La riduzione d'un piano può eseguirsi, mediante uno di questi processi; poichè se tutti i punti principali di questo piano sono legati da triangoli, e se si costruiscono altri triangoli che gli siano simili, e disposti nello stesso senso, ed i cui lati siano a quelli del primo in un dato rapporto, si avrà il *primo abbozzo* della copia della pianta proposta. Ritorneremo su questo particolare.

Invece di seguire la penosa via che abbiamo indicata per trovare una quarta proporzionale a tre linee date, è più facile fare uso delle *scale*, le cui lunghezze sono nello stesso rapporto che deve esistere fra le linee omologhe

Digitized by Google

d'una figura e della sua copia; così passiamo a parlare della loro costruzione.

101. *Costruire una scala di parti eguali.* (fig. 84)

Per *scala* s'intende una retta che serve a misurare tutte le linee d'un piano o d'una carta. Quando non ci sono minute particolarità da rappresentare, s'impiegano più sovente delle scale costruite come quella in fondo alla (fig. 84); nel caso però contrario si fa uso di scale di *decimali*. Ecco come si costruiscono quest' ultime.

Suppongbiamo che si voglia la decima parte del piccolo intervallo *am*, che può per esempio rappresentare un metro. S' inalzerà alla retta *ab* la perpendicolare *ac*, su cui si porteranno dieci intervalli eguali; per tutti i punti poi di divisione, si condurranno delle parallele alla linea *ab*, quindi si tireranno le transversali *cm*, *xn*, *yp*... che saranno equidistanti, poichè gli spazii *am*, *mn*.... *cx*, *xy*.... sono per costruzione eguali. In questa guisa la parte della prima parallela (1) (1') intercetta nel triangolo *t'bd*, sarà la decima di *am* ossia d'un metro. La parte della seconda parallela parimente intercetta, ne sarà i $\frac{2}{10}$, e così di seguito.

Adesso se si vuole una lunghezza di 16 metri $\frac{4}{10}$ per esempio, si prenderà col compasso la parte della parallela (4) (4') compresa fra *ef*, e la traversa *qz*. Parimente per avere la lunghezza di $28^m,53$, si prenderà la parte della parallela che è compresa fra *gh* ed *xn*, e che occupa il mezzo fra le altre due (5) (5') e (6) (6').

In pratica si rimpiazzano le lettere *f*, *g*, coi numeri 10, 20, e le lettere *v*, *u*, *t*, *s*, *r*... coi numeri 1, 2, 3, 4, 5. . . .

102. *Trovare una media proporzionale fra due linee date.* (fig. 85)

I. *Soluzione.* Sopra una retta indefinita *xy*, portate al seguito l'una dell'altra le linee date *A* e *B*. Sulla somma *xy* di queste due linee, come diametro descrivete una semicirconferenza, e per l'estremità *z* del segmento $xz = A$, inalzate sopra *xy* la perpendicolare *zu*, che sarà la media proporzionale cercata (n.° 54). In fatti per la proprietà del circolo, si ha $xz : zu :: zu : zy$, ossia $A : zu :: zu : B$.

II. *Soluzione.* Sulla linea maggiore *B* o *xy'* descrivete una semicirconferenza; portate la linea *A* sulla linea *B*, cioè fate $xz = A$, e per l'estremità *z* della retta *A*, alzate *zu'* perpendicolare ad *xy'*: finalmente conducete la corda *xu'*, che sarà la media proporzionale cercata (n.° 54).

Per trovare una media proporzionale fra due numeri, si moltiplicano l'uno per l'altro, e la radice quadrata del prodotto è la media proporzionale. (Vedi *Algebra* n.° 87).

103. *Dividere una linea in media ed estrema ragione.* (fig. 86)

Sia la retta AB che si tratta di dividere in media ed estrema ragione. Conducete CA perpendicolare ad AB, e fate $CA = \frac{AB}{2}$; dal punto C come centro, e col raggio CA descrivete una circonferenza; unite CB, prendete $BE = DB$, ed il punto E dividerà AB, siccome lo esige l'enunciato della questione.

Poichè essendo AB tangente alla circonferenza, si ha (n.° 56),

$$HB : AB :: AB : BD$$

e quindi,

$$HB - AB : AB :: AB - BD : BD;$$

ma, $\quad HB - AB = HB - HD = BD;$

ed $\quad AB - BD = AB - BE = AE;$

dunque la proporzione precedente diviene

$$BD : AB :: AE : BD.$$

e cambiando posto ai medii ed agli estremi, e mettendo BE per BD,

$$AB : BE :: BE : AE;$$

AB essendo maggiore di BE, si ha necessariamente $BE > AE$; dunque la parte maggiore BE della linea AB è media proporzionale fra AB ed AE.

Si osserverà che in questa costruzione, la secante BH è divisa in media ed estrema ragione al punto D.

104. *Trovare il lato d'un quadrato equivalente ad un rettangolo dato.*

Siano b ed h la base e l'altezza del rettangolo dato, x il lato del quadrato cercato. È chiaro che in virtù dell'enunciato della questione, si deve avere

$$b \times h = x^2, \text{ o } b : x :: x : h;$$

cioè che il lato del quadrato è medio proporzionale fra la base e l'altezza del rettangolo. Si risolverà dunque questo proplema col metodo del n.° 102.

105. *Trasformare un poligono rettilineo qualunque, in un altro poligono equivalente, e che abbia un lato di meno.* (fig. 72)

Supponghiamo che il poligono proposto sia il quadrilatero $ABCD$, si tratta di trovare un triangolo che gli sia equivalente. Perciò conducete la diagonale AC, e per il punto D la retta DE parallela a questa diagonale e terminata al lato AB sufficentemente prolungato; unite quindi i punti E, C; il triangolo BCE sarà equivalente al quadrilatero $ABCD$. Per provarlo bisogna considerare che i triangoli ADC, AEC sono eguali in superficie, avendo la medesima base AC e la medesima altezza: se dunque alla parte comune ACB, si aggiunge da una parte il triangolo ADC, e dall' altra il triangolo AEC, avremo due somme eguali; dunque il triangolo EBC è equivalente al quadrilatero $ABCD$.

Si vede così la possibilità di trasformare un poligono qualunque in un triangolo equivalente; poichè se si tratta per esempio, d'operare sopra un pentagono, si trasformerà col metodo precedente, in un quadrilatero equivalente; poscia si troverà un triangolo equivalente a questo quadrilatero.

106. *Trovare un quadrato equivalente ad un poligono dato.*

Per risolvere questo problema graficamente, si trasformerà il poligono dato in un triangolo equivalente; quindi si prenderà, col processo del n.° 102, una media proporzionale fra la base è la metà dell' altezza di questo triangolo: questa media proporzionale sarà il lato del quadrato cercato (n.° 72 e 104).

Ne segue da ciò che si possono *quadrare* tutte le figure rettilinee.

Nota. Per costruire un quadrato equivalente ad un circolo, bisognerebbe che il lato di questo quadrato fosse una media proporzionale, fra la circonferenza e la metà del raggio del circolo dato; ma il rapporto numerico di queste due linee essendo incommensurabile, ne segue che la quadratura del circolo è impossibile; pertanto l' area del quadrato ottenuto con questo metodo, differirà tanto meno da quella del circolo, in quanto che più prossimo gli sarà il rapporto di cui si tratta.

107. *Inscrivere un quadrato in un circolo.* (fig. 87)

Conducete due diametri AC, BD perpendicolari fra loro (n.° 86), e le quattro rette che uniranno le loro estre-

Digitized by Google

metà saranno i lati del quadrato inscritto *ABCD*: ciò che è manifesto.

Si vede chiaro quello che farsi dovrebbe per circoscrivere un quadrato al medesimo circolo; non è difficile provare che il quadrato circoscritto è doppio del quadrato inscritto.

Dividendo in due parti eguali ogni quarto di circonferenza, ed unendo tutti i punti di divisione, si avrebbe l'ottagono regolare inscritto; da quello si potrebbe passare ad un altro poligono regolare d'un doppio numero di lati (n.° 91). Così tutti i poligoni regolari inscrivibili o circoscrivibili coll'ajuto del quadrato, sono quelli di

4, 8, 16, 32, ec. lati.

108. *Inscrivere un esagono regolare in un circolo.* (fig. 45)

Portate il raggio del circolo dato, sei volte di seguito attorno alla circonferenza, poichè il lato dell'esagono regolare è eguale al raggio del circolo circoscritto (n.° 61).

Unendo due a due i punti di divisione, si avrebbe il triangolo equilatero inscritto. È da osservarsi che questo triangolo è il quarto del triangolo equilatero circoscritto.

Tutti i poligoni inscrivibili o circoscrivibili al circolo per mezzo dell'esagono regolare, sono quelli di

3, 6, 12, 24, ec. lati.

109. *Inscrivere un decagono regolare in un circolo.* (fig. 47)

Si dividerà il raggio del circolo dato in media ed estrema ragione, e la parte maggiore di questo raggio sarà il lato del decagono regolare inscritto (n.° 62).

Se due a due si uniscono i dieci punti di divisione, s'otterrà il pentagono regolare. Da ciò, e da quello che precedentemente è stato detto ne segue, che tutti i poligoni regolari inscrivibili o circoscrivibili per mezzo del decagono sono quelli di

5, 10, 20, 40, ec. lati.

110. *Inscrivere un pentedecagono in un circolo.*

L' arco sotteso dal lato del pentedecagono è eguale all'arco dell'esagono, meno quello del decagono. Infatti l'arco dell'esagono $= \frac{4}{6}$ o $\frac{2}{3}$ d'un angolo retto; l'arco del decagono $= \frac{4}{10}$ o $\frac{2}{5}$; la differenza dunque di questi due archi $= \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$ d'un angolo retto, ed è pre-

cisamente l' arco d' un pentedecagono. Mediante questo poligono si potranno inscrivere o circoscrivere tutti quelli di 15, 30, 60, ec. lati.

Nota. I problemi che precedono trovano la loro applicazione nel disegno della fortificazione regolare.

Soluzioni col calcolo.

111. *Inalzare sul terreno una perpendicolare ad una retta, per mezzo d' una corda.* (fig. 88)

Abbiamo già risoluto questo problema (n.° 92); ma la soluzione attuale è fondata sulla proprietà del triangolo rettangolo, e può essere impiegata quando non c' è di libero che lo spazio compreso fra i due lati dell' angolo retto.

La retta data è CA; si tratta d' inalzargli al punto C la perpendicolare CD. Dividete una corda in tre parti, che stiano fra loro come 3, 4, 5; attaccate le due sue cime ad un palo z, e dopo aver fatto $Cz = 3$, passate questa corda dietro al palo C; stendetela in modo che le sue due parti Cz, yz facciano un angolo y, e siano respettivamente eguali a 4 e 5; piantate finalmente delle biffe nella direzione dei due pali C, y, e la retta CyD sarà la perpendicolare richiesta. Infatti il triangolo Czy è rettangolo in C, poichè il quadrato del lato maggiore è eguale alla somma dei quadrati degli altri due (n.i 53 e 77).

112. *Misurare la larghezza d' un fiume, supponendo che non si abbia altro strumento che il metro.* (fig. 89)

Alla linea AC perpendicolare alla corrente dell' acqua, inalzate la perpendicolare CE col metodo precedente; prendete CD circa il terzo o la metà di CA, e DE presso a poco la metà di CD: ponete delle biffe nella direzione AD, ed inalzate al punto E la perpendicolare EF; finalmente misurate, BC, CD, DE, EF.

Con questa costruzione i triangoli ADC, FDE sono simili; così

$$DE : EF :: CD : CA.$$

avendo determinato CA, avremo la larghezza del fiume $AB = CA - CB$.

Si suppone che A sia un oggetto rimarcabile dalla sponda opposta a quella su cui uno è, come una pietra grossa, un albero, una siepe, ec.

Siano per esempio $BC = 4^m$, $CD = 30^m$, $DE = 20^m$, $EF = 45^m$; avremo

$$20 : 45 :: 30 : CA = \frac{270}{4} = 67^m{,}5,$$
$$4 : 9 ::$$

dunque $AB = 67^m{,}5 - 4^m = 63^m{,}5.$

113. *Misurare l'altezza d'un oggetto inaccessibile, supponendo come qui sopra, che non si abbia altro strumento che il metro.* (fig. 90)

Sia SP l'altezza da misurare, e supponghiamo che l'intervallo BP non sia accessibile che al punto B; supponghiamo inoltre che il terreno PD sia orizzontale, o almeno d'una pendenza sola.

Si taglieranno due pertiche ben dritte, alle quali si darà se si vuole la medesima lunghezza, e si ficcheranno verticalmente l'una in B, l'altra in A. Siano per esempio BF ed AE l'altezze di queste pertiche; cercate stendendovi per terra, i punti C e D ove i raggi visuali SF, SE, passando per l'estremità d'ogni pertica e per quella dell'oggetto da misurare, incontrano la superficie BD del terreno: misurate quindi le parti DA, AC, CB di questa linea, come pure la lunghezza d'ogni pertica, e procedete come segue per calcolare l'altezza SP.

Supponendo per abbreviare $DA = a$, $AC = b$, $CB = c$, $AE = FB = h$, $BP = x$, $PS = y$, i triangoli simili CBF, CPS daranno

$$c : h :: c + x : y.$$

I triangoli simili DAE, DPS daranno parimente.

$$a : h :: a + b + c + x : y;$$

e poichè i conseguenti sono i medesimi nelle due proporzioni, si ha diritto di conchiudere che

$$a : c :: a + b + c + x : c + x,$$

d'onde si deduce $x = \dfrac{(b+c)c}{a-c}$:

sostituendo quindi questo valore nella prima proporzione, s'ottiene $y = \dfrac{h(a+b)}{a-c}$;

cioè, che la *differenza dei due segmenti* DA, CB *stà alla distanza* CD, *come l'altezza comune delle pertiche sta all'altezza cercata.*

114. *Noto il numero dei lati d'un poligono regolare, trovare il valore dell'angolo al centro, e quello dell'angolo alla circonferenza.*

Siccome ci sono tanti angoli al centro quanti ci sono lati in un poligono, e che tutti questi angoli sono eguali, uno di essi è dunque eguale a 4 angoli retti, divisi per il numero dei lati del poligono; così indicando questo numero per n, si ha

$$\text{angolo al centro} = \frac{4 \text{ retti}}{n}.$$

La somma degli angoli d'un poligono qualunque essendo eguale a tante volte due angoli retti quanti sono i lati meno due (n.° 44), ed in un poligono regolare, tutti gli angoli essendo eguali, ne segue che ognuno d'essi è eguale alla loro somma divisa per il loro numero; si ha dunque, angolo alla circonferenza, ossia

$$\text{angolo del poligono} = \frac{2 \text{ retti } (n-2)}{n}.$$

Si conchiude da ciò che l'angolo al centro e l'angolo del poligono equivalgono insieme a due angoli retti. Così si può risolvere questo problema. *Una piazza da guerra essendo fortificata regolarmente, e l'angolo formato da due cortine consecutive essendo noto, trovare il numero dei bastioni.*

Innanzi lo stabilimento del nuovo sistema metrico in Francia, i geometri erano soliti dividere la circonferenza in 360 gradi, il grado in 60 minuti, il minuto in 60 secondi, ec.; ma a motivo dei vantaggi della divisione decimale, dividono adesso la circonferenza in 400gr, il grado in 100 minuti, il minuto in 100 secondi, e così di seguito: di modo che il quarto della circonferenza o quadrante è di 100 gradi; cosa che è già stata osservata in Aritmetica. Da ciò ne segue che l'angolo al centro dei poligoni regolari di 3, 4, 5, 6, ec. lati sono respettivamente di 133gr 33' 33'' $\frac{1}{3}$; 100gr; 80gr; 66gr 66' 66'' $\frac{2}{3}$ ec.

115. *Misurare un angolo col rapportatore.*

Il *rapportatore* è un semi-circolo di rame o di corno diviso in 180 gradi, o in 200 gradi decimali, e qualche volta in mezzi gradi se è d'un gran diametro. Se ne fa un uso frequente per riportare sulla carta gli angoli misurati sul terreno; se ne fa pure uso per misurare un angolo sulla carta, ed ecco come ci si procede. Si pone il centro di

Digitized by Google

questo strumento al vertice dell' angolo da misurare, e si fa coincidere il suo diametro con uno dei lati di quest' angolo: allora il numero dei gradi contenuti nell' arco compreso fra i due lati, è la misura di quest' istesso angolo.

166. *Inscrivere in un circolo, col rapportatore un poligono regolare d' un dato numero di lati.*

Il metodo grafico che indistintamente si applica ad ogni poligono regolare, e che è sufficentemente esatto nella pratica, consiste a porre il centro d' un grande rapportatore al centro del circolo dato, ed a prendere sulla circonferenza di questo rapportatore, degli archi consecutivi il cui numero di gradi sia il valore dell' angolo al centro del poligono da inscrivere. Conducendo allora dei raggi per l' estremità di tutti questi archi, la circonferenza del circolo sarà divisa come si desidera. È indubitato che si può col medesimo mezzo, circoscrivere ad un circolo un poligono regolare qualunque.

117. *Trovare la superficie d'un triangolo di cui si conoscono i tre lati.* (fig. 61)

Siano i lati $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$; ed indichiamo con x il segmento AD; avremo per il teorema del n.° 78 il rapporto seguente:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2AB \times AD,$$

o facendo uso dell' indicazioni date per maggior brevità,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx;$$

d' onde $$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c};$$

e $$CD = y = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AD}^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)^2};$$

per conseguenza

$$\text{area } ABC = \frac{cy}{2} = \frac{c}{2}\sqrt{b^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)^2};$$

oppure riducendo

$$\text{area } ABC = \sqrt{\frac{4\,b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{16}};$$

Il numeratore della frazione che è sotto al radicale, esprime la differenza di due quadrati, dunque (n.° 34. *Algebra*).

Digitized by Google

$$s.\ ABC = \sqrt{\left(\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4}\right)\left(\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4}\right)};$$

$$= \sqrt{\frac{[(b+c)^2-a^2]\,[a^2-(b-c)^2]}{4\,.\,4}};$$

$$= \sqrt{\left(\frac{b+c+a}{2}\right)\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\left(\frac{a-b+c}{2}\right)}.$$

Finalmente se per abbreviare si fa $a+b+c=p$, avremo $\frac{b+c-a}{2}=\frac{p}{2}-a$, $\frac{a-b+c}{2}=\frac{p}{2}-b$, ed $\frac{a+b-c}{2}=\frac{p}{2}-c$, perciò,

$$s.\ ABC = \sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)}.$$

Risulta da ciò, che *l'area d'un triangolo i cui tre lati sono dati, è eguale alla radice quadrata del prodotto dei quattro fattori, il primo dei quali è la metà del perimetro del triangolo, e di cui gli altri sono i tre resti che si ottengono successivamente togliendo ognuno dei lati dal semiperimetro.*

Questa formula è utilissima nella Geodesia; poichè se un poligono rettilineo qualunque è decomposto in triangoli, e che si conoscano tutti i loro lati, si potrà immediatamente valutare l'area di questo poligono, mediante questa formula.

Per l'applicazione sia $a=25^{m}$, $b=20^{m}$, $c=15^{m}$, avremo.

$$s.\ ABC = \sqrt{30\,.\,(30-25)\ (30-20)\ (30-15)} = 150^{m.q};$$

ma siccome in questo caso particolare, il triangolo ABC è rettangolo, poichè il quadrato del lato maggiore, è eguale alla somma dei quadrati degli altri due lati, è più semplice il determinare la sua superficie moltiplicando uno dei lati dell'angolo retto per la metà dell'altro (n.° 72); si ha dunque come qui sopra,

$$s.\ ABC = \frac{20\times 15}{2} = 150^{m\,q}.$$

Digitized by Google

Problemi da risolvere.

118. Abbiamo fatto uso dell'Algebra per risolvere il problema precedente, perchè egli è in generale il mezzo il più diretto ed il più sicuro per giungere a scoprire in Geometria, i rapporti che esistono fra le quantità date e quelle che si cercano. Ecco gli enunciati di diverse altre questioni che gli Alunni potranno per esercizio risolvere, o per la via puramente geometrica, o coll' analisi.

1.° *L'area d'un rettangolo essendo di* $80^{m.q.}$, *e l'eccesso della sua base sulla sua altezza essendo* 11^{m}, *trovare i valori numerici di queste due linee.* Risposta 16^{m} e 5^{m}.

2.° *L'area d'un trapezio* $= 1315^{m.q}$, *e le sue due basi parallele essendo* 13^{m} *e* 21^{m}; *qual è la sua altezza?* Risp. $77^{m},353$.

3.° *L'area d'un triangolo equilatero essendo di* $389^{m.q.},71$ *trovarne il lato.* Risp. 30^{m}.

4.° *L'area d'un esagono regolare essendo di* $166^{m.q.},272$; *qual è il lato?* Risp. 8^{m}.

5.° *La somma dei tre lati d'un triangolo rettangolo essendo* 156^{m}, *e la sua superficie eguale a* $1014^{m.q}$; *determinare ognuno di questi lati.* Risp. 39^{m}, 52^{m}, 65^{m}.

6.° *I due segmenti del diametro d'un circolo essendo nel rapporto di* 3 *a* 5, *e le due parti della corda che forma questi segmenti essendo* 10 *e* 18; *trovare questo diametro.* Risp. $27^{m},71$.

7.° *L'area d'un circolo essendo di* $132^{m.q.},7326$; *qual è il suo raggio?* Risp. $6^{m},5$.

8.° *Trovare l'area d'un circolo, sapendo che le due corde condotte da un punto della circonferenza all'estremità del diametro sono* 17^{m}, *e* 23^{m}. Risp. $642^{m.q.},456$.

9.° *Determinare l'area d'un settore circolare, il cui arco è* $48^{gr}\ 20'$, *ed il cui raggio* $= 20^{m}$. Risp. $151^{m.q.},425$.

10.° *I tre lati d'un triangolo essendo* 30^{m}, 24^{m}, *e* 20^{m}; *dividerlo in due parti equivalenti con una linea parallela al lato maggiore.* Risp. la linea di divisione $= 21^{m},21$.

11.° *I tre lati d'un triangolo stando come* $3:7:8$, *la sua area essendo* $340^{m.q.}$; *quali sono questi tre lati?* Risp. $17^{m},16$; $40^{m},04$; $45^{m},76$.

12.° *Trovare il rapporto dell'area del dodecagono regolare inscritto a quella del quadrato circoscritto.* Risp. Il dodecagono inscritto è i $\frac{3}{4}$ del quadrato circoscritto.

Digitized by Google

LIBRO II.

CAPITOLO PRIMO.

DELLE PROPRIETA' DEI PIANI CHE S'INCONTRANO, E DI QUELLE DELLE LINEE RETTE TAGLIATE DA PIANI PARALLELI.

119. *L' intersezione di due piani è una linea retta.* Infatti una retta che passasse per due punti della sezione comune dei due piani, sarebbe alla volta nell' uno e nell' altro piano; dunque questa retta è l' intersezione medesima di questi piani.

Per un punto, come pure per una retta, si possono fare passare un' infinità di piani diversi.

La posizione di tre punti, come quella di due rette che si tagliano o che sono parallele, determina la posizione d' un piano.

Una retta è detta *perpendicolare* ad un piano, quando è perpendicolare a tutte le rette che passano per il suo piede nel piano: reciprocamente il piano è perpendicolare alla retta.

Il *piede* della perpendicolare è il punto ch' essa ha comune col piano.

Una linea è *parallela* ad un piano, o due piani sono *paralleli fra loro*, quando la linea non può mai incontrare il piano, o quando i piani non possono incontrarsi a qualunque distanza si suppongano prolungati l' uno e l' altro.

120. *Una retta è perpendicolare ad un piano, quando lo è a due rette che passano per il suo piede e che sono situate in questo piano.* (fig. 91)

Sia AP perpendicolare sulle rette BP e CP situate sul piano MN. Bisogna provare che ogni retta DP condotta nel medesimo piano e per il punto P, è perpendicolare ad AP.

Per il punto D preso ad arbitrio sopra DP, conducete BC, in modo che $BD=CD$, e conducete le rette AB, AD, AC. Il triangolo BAC dà

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AD}^2+2\overline{BD}^2 \text{ (n.° 80)},$$

il triangolo BCP dà parimente

$$\overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 = 2\overline{DP}^2 + 2\overline{BD}^2,$$

Sottraendo quest' ultima equazione dalla prima, e riducendo per mezzo dei rapporti $\overline{AB}^2 - \overline{BP}^2 = \overline{AP}^2$, $\overline{AC}^2 - \overline{CP}^2 = \overline{AP}^2$, che respettivamente forniscono i triangoli rettangoli ABP, ACP, si avrà

$$2\overline{AP}^2 = 2\overline{AD}^2 - 2\overline{DP}^2, \text{ dunque } \overline{AP}^2 + \overline{DP}^2 = \overline{AD}^2;$$

dunque il triangolo ADP è rettangolo in P; dunque ec.

121. *Di tutte le rette condotte da un punto ad un piano, la più corta è la perpendicolare, e la più lunga è quella che maggiormente s' allontana dal piede di questa perpendicolare.* (fig. 92)

Sia AP perpendicolare al piano MN, ed $AB > AC$; i punti B e C, essendo situati nel piano MN, se per il punto A e nel piano ABP, si tira la retta $AD = AC$, i triangoli rettangoli APD, APC saranno eguali. Ora per il n.° 24, l' obliqua AB essendo maggiore di AD, si ha BP maggiore di PD; ma $PD = PC$ per costruzione, dunque $PB > PC$, dunque ec.

Segue da ciò, che il piede P della perpendicolare AP, è il centro d' un circolo che sarebbe descritto sul piano MN dal punto A come centro e con un raggio maggiore di AP: proprietà, che fornisce il mezzo d' abbassare sopra un piano una perpendicolare da un punto preso fuori di questo piano.

La vera distanza dal punto A al piano MN è misurata dalla perpendicolare AP.

122. *Se dal piede d' una perpendicolare ad un piano, si abbassa una perpendicolare sopra una linea condotta sopra questo piano, e che si tiri una retta dal piede di questa seconda perpendicolare ad un punto qualunque della prima, questa retta sarà perpendicolare alla linea condotta nel piano.* (fig. 93)

Sia AP perpendicolare al piano MN, e PD perpendicolare alla linea BC condotta in questo piano; dico che AD sarà perpendicolare a BC.

Prendete $BD = DC$, ed unite BP, PC. Con questa costruzione i triangoli BPD, CPD sono eguali; dunque $BP = PC$. Parimente i triangoli rettangoli APB, APC sono

Digitized by Google

eguali, dunque $AB = AC$, dunque (n.° 24) la retta AD è perpendicolare a BC.

123. *Se una retta è perpendicolare ad un piano, ogni linea parallela a questa, sarà perpendicolare al piano medesimo.* (fig. 94)

Sia la linea AP perpendicolare al piano MN e CD parallela ad AP. Conducete nel senso di queste parallele, un piano, la cui intersezione con quello MN sarà B; in quest' ultimo piano, conducete DE perpendicolare a PD, ed unite AD.

In virtù del teorema precedente DE è perpendicolare ad AD, e per costruzione questa retta è pure perpendicolare a PD; dunque DE è perpendicolare al piano ABC, e per conseguenza alla retta CD. Ma la retta CD parallela ad AP, è perpendicolare a PD; dunque questa retta è perpendicolare al piano MN.

Da ciò ne segue, 1.° che se due, o in generale diverse linee situate in diversi piani, sono perpendicolari ad un piano, queste linee sono parallele fra loro; 2.° che se due rette A, B sono ciascheduna parallela ad una terza C, queste rette A e B sono pure l' una all' altra parallele.

124. *Ogni retta parallela ad una linea condotta in un piano, è parallela a questo piano.* (fig. 95)

La retta AB, che è parallela alla linea CD condotta nel piano MN, non potrebbe incontrare questo piano senza tagliare la retta CD, ciò che è impossibile; AB dunque è parallela al piano MN.

125. *Due piani perpendicolari ad una medesima retta sono paralleli fra loro; reciprocamente se una linea è perpendicolare ad uno dei piani paralleli, sarà anche perpendicolare all' altro piano.* (fig. 96)

Supponghiamo che i piani MN, PQ perpendicolari l' uno e l' altro alla retta AB, possano incontrarsi secondo CD. Prendiamo un punto O su questa sezione comune, e conduchiamo le linee AO, BO; la prima AO sarà tutta intiera nel piano MN, poichè A è il piede della perpendicolare AB; dunque l' angolo A è retto. Per la stessa ragione BO è situata nel piano PQ, dunque l' angolo B è retto. Da ciò ne segue che AO e BO sarebbero due perpendicolari abbassate da un medesimo punto sopra una retta, ciò che è impossibile; i piani dunque MN, PQ non possono incontrarsi; questi piani dunque sono paralleli.

Digitized by Google

126. *Le intersezioni di due piani paralleli con un terzo piano, sono parallele.* (fig. 97)

Supponghiamo che le rette AB, CD siano le intersezioni respettive del piano $ABDC$ coi piani paralleli MN, PQ. Se queste rette non fossero parallele, è evidente ch' elleno s' incontrerebbero, poichè sono in un medesimo piano: ma allora i piani MN, PQ nei quali respettivamente si trovano, s'incontrerebbero pure, ciò che è contro la supposizione; dunque le rette AB, CD sono parallele.

127. *Le parallele comprese fra due piani paralleli sono eguali.* (fig. 98)

Se per le rette parallele AB, CD si concepisce che si sia condotto il piano $ABDC$, le intersezioni AC, BD di questo piano coi piani paralleli MN, PQ saranno parallele fra loro, ed allora la figura $ABDC$ sarà un parallelogrammo: dunque $AB = CD$.

128. *Se due angoli non situati in un medesimo piano, hanno i lati paralleli e diretti nel medesimo senso, questi angoli saranno eguali, ed i loro piani saranno paralleli.* (fig. 99)

Siano i lati AC, CB dell' angolo C respettivamente paralleli ai lati $A'C'$, $C'B'$ dell' angolo C'; e siano presi $AC = A'C'$, $CB = C'B'$.

Secondo il (n.° 31), la figura $CAA'C'$ è un parallelogrammo, e per conseguenza AA' è eguale e parallela a CC'; l'istesso è di BB', e di CC'; dunque AA' è pure eguale e parallela a BB' (n.° 123). Così i triangoli ACB, $A'C'B'$ avendo i tre lati respettivamente eguali si ha $C = C'$; ed è evidente che questi triangoli, oppure i piani MN, PQ che respettivamente gli racchiudono, sono paralleli.

129. *Due rette comprese fra due piani paralleli, sono tagliate in parti proporzionali da un terzo piano condotto parallelamente agli altri due.* (fig. 100)

Le rette AB, CD essendo quelle che si considerano, se per ABC si conduce un piano, le sue intersezioni coi piani paralleli MN, RS saranno AC, xy; se parimente per BCD si conduce un piano, taglierà PQ ed RS secondo BD ed yz. Ora nel triangolo ABC si ha,

$$Ax : Bx :: Cy : By ;$$

e nel triangolo BCD si ha,

$$Cy : By :: Cz : Dz ;$$

Digitized by Google

dunque a causa del rapporto comune,

$$Ax : xB :: Cz : Dz;$$

dunque ec.

CAPITOLO II.

DEGLI ANGOLI POLIEDRI.

130. Si chiama angolo *driedro*, cioè angolo a due facce, l'inclinazione di due piani. (fig. 101)

131. *L'angolo driedro è misurato dall'angolo che formano fra loro due rette condotte in ognuna delle sue facce perpendicolarmente alla loro intersezione, e per un medesimo punto di questa linea.*

Se dunque GH condotta nel piano AC è perpendicolare ad AB, e che GK condotta nel piano AE sia pure perpendicolare ad AB, l'angolo HGK misurerà l'inclinazione di questi due piani.

132. Due piani che si traversano vicendevolmente, presentano le medesime proprietà di due linee che si tagliano (n.° 14).

Parimente quando due piani paralleli sono tagliati da un terzo piano, esistono le medesime proprietà che quando due rette parallele sono tagliate da una terza retta (n.° 29).

133. *Se una retta è perpendicolare ad un piano, ogni piano che passerà per questa retta sarà perpendicolare all'altro piano.* (fig. 102)

Per la retta AP, perpendicolare al piano MN, conduchiamo ad arbitrio il piano AB, e per il piede P di questa perpendicolare, inalziamo alla sezione comune PB dei due piani una perpendicolare BD nel piano MN, la quale sarà nel medesimo tempo perpendicolare ad AP (n.° 120); ma l'angolo APD misura l'inclinazione dei due piani MN, PC (n.° 131); dunque poichè quest'angolo è retto, i due piani sono perpendicolari fra loro.

Concludiamo da ciò che *se due piani sono perpendicolari ad un terzo piano, la sezione comune dei primi due è perpendicolare al terzo.*

134. Si chiama *angolo solido*, o *angolo poliedro*, lo spazio indefinito compreso fra diversi piani che si riuni-

scono al medesimo punto. Il più semplice di tutti gli angoli poliedri è quello formato da tre piani; ci sono dunque nell'angolo triedro sei cose da considerare, cioè tre angoli piani, e tre angoli driedri.

135. *La somma di due qualunque degli angoli piani che compongono un angolo triedro, è sempre maggiore del terzo.* (fig. 103)

Sia l'angolo triedro S composto degli angoli piani ASB, ASC, CSB. Se nel primo angolo ASB si conduce SD, in modo che l'angolo $DSB=CSB$; poscia se si prende $SD=SC$, e che per i due punti C e D, si conduca ad arbitrio il piano ABC, i triangoli DSB, CSB saranno eguali, avendo un angolo eguale compreso fra due lati respettivamente eguali. Dunque $DB=CB$; ma $AC+CB>AD+DB$, o ciò che torna lo stesso, $AC>AD$. Così i due triangoli ASD, ASC hanno un angolo disuguale compreso fra lati respettivamente eguali; dunque (n.° 21), $ASD<ASC$; aggiungendo da una parte l'angolo DSB, e dall'altra il suo eguale CSB, avremo $ASD+DSB$, ossia $ASB<ASC+CSB$; dunque ec.

136. *La somma degli angoli piani che compongono un angolo poliedro convesso, ossia a costole saglienti, è sempre minore di 4 angoli retti.* (fig. 104)

Tagliate l'angolo poliedro S con un piano qualunque $ABCDE$, e dal punto O preso in questo piano, conducete le rette AO, BO,.... La somma degli angoli dei triangoli ASB, BSC,.... che hanno in S il vertice comune, equivalgono alla somma degli angoli d'un simil numero di triangoli AOB, BOC, formati attorno al vertice O. Ora al punto A, i due angoli SAB, SAE presi insieme, sono maggiori del terzo angolo BAE; parimente al punto B, si ha $SBA+SBC>ABC$, e così di seguito; per conseguenza la somma degli angoli alla base dei triangoli SAB, SAE,.... è maggiore della somma degli angoli alla base dei triangoli il cui vertice è in O; dunque per compenso, la somma degli angoli attorno al punto S è minore della somma degli angoli, i quali intorno al punto O equivalgono a quattro angoli retti.

137. *Se due angoli triedri sono formati da tre angoli piani respettivamente eguali e disposti nel medesimo modo, questi angoli saranno eguali e da soprapporsi.* (fig. 105)

Sieno S, S' i due angoli triedri. Dal punto A preso ad arbitrio sul lato SA, conducete AB ed AC perpendicolari

ad SB ed SC. Dal medesimo punto A, abbassate sul piano BSC la perpendicolare AP; unite il piede P di questa perpendicolare coi punti B e C. Prendete finalmente $S'A' = SA$, e fate la medesima costruzione per l'angolo S'.

I triangoli SBA, $S'B'A'$, l'uno rettangolo in B, l'altro in B' sono eguali: l'istesso succede dei triangoli ASC, $A'S'C'$; dunque $SB = S'B'$, $SC = S'C'$, $AB = A'B'$ ed $AC = A'C'$. Di più in virtù del n.° 122 gli angoli SBP, $S'B'P'$ sono retti.

Ciò posto, il quadrilatero $SBPC$ è eguale al quadrilatero $S'B'P'C'$, ed in fatti il primo può essere applicato esattamente sull'altro; dunque $BP = B'P'$ e $PC = P'C'$. Da ciò ne segue che i triangoli ABP, $A'B'P'$ rettangoli l'uno in P e l'altro in P', sono eguali; dunque angolo $ABP =$ angolo $A'B'P'$; ma l'angolo ABP misura l'inclinazione dei due piani BSA, BSC; parimente l'angolo $A'B'P'$ misura l'inclinazione dei due piani $B'S'A$, $B'S'C'$; dunque queste due inclinazioni sono eguali; dunque i due angoli triedri S, S' possono soprapporsi.

138. Gli angoli piani che compongono gli angoli triedri S, S' potrebbero essere disposti in un ordine inverso, e si dimostrerebbe pure che questi sono eguali in tutte le loro parti; ma questi angoli allora non potrebbero punto soprapporsi, ed in tal caso si chiamano *angoli simmetrici*. (*Vedi* la Geom. di Legendre.)

CAPITOLO III.

DEI POLIEDRI O DEI CORPI TERMINATI DA DEI PIANI, E DI QUALCUNA DELLE LORO PROPRIETA'.

139. Uno spazio racchiuso in ogni senso da diversi piani, chiamasi *solido*, o più esattamente *poliedro*. (fig. 106)

Ci bisognano quattro piani almeno per terminare uno spazio da tutte le parti. In questo caso, questo spazio si chiama *tetraedro*: tale è il corpo rappresentato dalla figura $SABC$. (fig. 106)

L'intersezione delle due facce adiacenti d'un poliedro, chiamasi *lato*, *spigolo* o *costola* del poliedro. Così SB è una costola del tetraedro $SABC$.

Ogni corpo di cui una delle facce è un poligono, e di cui tutte le altre facce sono triangoli che hanno il loro

Digitized by Google

vertice sul medesimo punto, chiamasi *piramide*. Il tetraedro è dunque una piramide.

I poliedri prendono diversi nomi riguardo al numero e alla disposizione delle loro facce. Si chiama (fig. 107) *prisma* per esempio, un corpo compreso sotto due facce opposte eguali e parallele, e di cui tutte le altre facce sono dei parallelogrammi. Tal è la figura 107.

Nel prisma i due poligoni opposti eguali *ABCDE*, *A'B'C'D'E'* ne sono chiamati le basi. Il poligono su cui è supposta situata una piramide se ne chiama pure la base.

La piramide ed il prisma si dicono *triangolari*, *quadrangolari*, ec. secondo che la loro base è un triangolo, un quadrilatero, ec.

L'altezza d'un prisma è la perpendicolare abbassata da un punto d'una delle sue basi sull'altra base.

L'altezza d'una piramide è la perpendicolare abbassata dal vertice di questo corpo sul piano della sua base.

Si chiama parallelepipedo un prisma che ha per base un parallelogrammo.

(fig. 108) Un parallelepipedo è *rettangolo* quando tutte le sue facce sono dei rettangoli.

(fig. 109) Il *cubo o l'esaedro regolare* è il parallelepipedo le cui facce sono tutte dei quadrati.

La diagonale d'un poliedro qualunque è la retta che unisce i vertici di due angoli poliedri non adiacenti.

140. *Le facce opposte d'un parallelepipedo sono eguali, e le diagonali condotte dai vertici degli angoli triedri si tagliano scambievolmente in due parti eguali.* (fig. 110)

Poichè secondo la definizione di questo solido le basi opposte *ABCD*, *EFGH* sono dei parallelogrammi uguali, e che i loro lati corrispondenti sono paralleli, ne segue che le costole *AE*, *BF*, *CG*, *DH* sono eguali e parallele fra loro; dunque le facce opposte *AF*, *DG* ed *AH*, *BG* sono pure eguali e parallele.

Se si conducono adesso due diagonali qualunque *AG*, *DF*, egli è evidente che saranno quelle del parallelogrammo *ADGF*; ora queste diagonali si tagliano vicendevolmente in due parti eguali al punto *O*, poichè i due triangoli *AOD*, *FOG* sono eguali, avendo un lato eguale adiacente a due angoli rispettivamente eguali; dunque ec.

È da rimarcarsi che gli angoli triedri *F*, *D* opposti, sono simmetrici l'uno all'altro, e che i due prismi triangolari *ABÇEFG*, *ADCEHG*, di cui è composto l'intiero prisma, sono equivalenti, quantunque le facce dell'uno

siano disposte in un ordine inverso delle facce dell' altro. Quelli che desiderassero le dimostrazioni rigorose di queste due proposizioni, le troveranno nella geometria di Legendre, o in quella di Lacroix.

Condizioni d'eguaglianza dei Tetraedri e dei Prismi, e natura delle sezioni fatte in questi corpi.

141. *Se gli angoli triedri omologhi delle piramidi triangolari sono composti di triangoli eguali e similmente disposti, queste piramidi sono eguali.*

Le piramidi triangolari sono pure eguali, se hanno un angolo driedro eguale compreso fra due facce respettivamente eguali ed unite nella stessa guisa.

Due prismi sono eguali, quando hanno un angolo triedro compreso fra tre piani respettivamente eguali, e congiunti nella medesima maniera.

Queste tre proposizioni facilmente si provano colla soprapposizione.

142. *Se si taglia un prisma con un piano parallelo alla base, la sezione risultante sarà eguale alla base.* (fig. 107)

Essendo il piano della sezione *abcde* parallelo alla base *ABCDE*, le parallele *Aa*, *Bb*, ... sono comprese fra piani paralleli, e per conseguenza eguali. Così tutte le figure *AEea*, *ABba*,... sono dei parallelogrammi. Di più gli angoli *bae*, *BAE* sono eguali, avendo i lati paralleli e diretti nel medesimo senso: l'istesso accade degli angoli *aed*, *AED*... dunque il poligono *abcde* è eguale alla base *ABCDE*.

143. *Se si taglia una piramide qualunque con un piano parallelo alla sua base, i suoi lati e la sua altezza saranno divisi proporzionatamente, e la sezione sarà un poligono simile alla base.* (fig. 111)

Sia *abcd* la sezione fatta nella piramide *SABCD*. Le rette *AB*, *ab*, *AD*, *ad*... sono parallele (n.° 126); così gli angoli *BAD*, *bad*... sono eguali, ed il poligono *abcd* è equiangolo al poligono *ABCD*. Di più per il n.° 46 $SA : Sa :: AD : ad :: AB : ab :$ ec. Dunque i lati del poligono *abcd* sono proporzionali ai lati omologhi del poligono *ABCD*; dunque questi due poligoni sono simili (n.° 57).

Digitized by Google

CAPITOLO IV.

MISURA DEI VOLUMI DEI PRISMI E DELLE PIRAMIDI.

144. Lo spazio occupato da un corpo, chiamasi la sua *solidità* o per meglio dire, il suo *volume*. Quando si considera un vaso o corpo vuoto, se ne indica il suo volume colla parola capacità.

I corpi sono o eguali o equivalenti in volume, secondo che sono o non sono soprapponibili, e ch' essi occupano degli spazii eguali.

145. *Due parallepipedi della medesima base e della medesima altezza sono equivalenti fra loro.* (fig. 112 e 113)

Possono accadere due casi realmente distinti; o le basi superiori situate in un medesimo piano sono comprese fra l' istesse parallele, o non ci sono comprese.

I. Caso. Sia *ABCD* la base comune dei due parallelepipedi *AG*, *AL*, che hanno la medesima altezza. Le loro basi superiori *EFGH*, *IKLM*, essendo comprese fra le parallele *EM*, *FL*, facilmente si vede che i due prismi *AEIBFK*, *DHMCGL* sono eguali n.° 141. Ma il primo parallelepipedo *AG* è equivalente al corpo intero *ABCDEFLM* meno il prisma triangolare *DHML*; parimente il secondo parallelepipedo *AL* è equivalente al corpo intero *ABCDEFLM* meno il prisma *AEIK*, dunque questi due parallepipedi sono equivalenti.

II. Caso. Se i due parallelepipedi che si considerano, hanno per basi superiori *NOPQ*, *IKLM* situate in un medesimo piano, e per base inferiore comune *ABCD*, questi due parallelepipedi saranno ancora equivalenti, poichè considerando che il parallelepipedo *AG* ha la sua base superiore *EFGH*, compresa alla volta fra le parallele che racchiudono le basi *NOPQ*, *IKLM*, questo parallepipedo sarà nel medesimo tempo equivalente al parallelepipedo *AP* ed al parallelepipedo *AL*; dunque i due parallelepipedi *AP*, *AL* inclinati in senso diverso, ed avendo l' istessa base e l' istess' altezza, sono equivalenti.

Da ciò risulta che *ogni parallelepipedo può essere cangiato in un parallelepipedo rettangolo equivalente avendo la medesima altezza ed una base equivalente.*

146. *Due parallelepipedi rettangoli che hanno la medesima base stanno fra loro come le loro altezze.* (fig. 114)

I due parallelepipedi rettangoli AG, AL hanno la medesima base AC. Supponghiamo prima che le loro altezze AE, AF siano commensurabili, e stiano per esempio come 19 a 7. Se si divide AE in 19 parti eguali, AI ne comprenderà 7, e se per tutti i punti di divisione di AE si conducono dei piani paralleli ad $ABCD$, il parallelepipedo AG sarà evidentemente composto di 19 volumi parziali che avranno l' istess'altezza e l' istessa base, ed il parallelepipedo AL sarà parimente composto di 7 di questi volumi parziali: dunque questi due parallelepipedi stanno fra loro :: 19 : 7. Dunque ec.

Quando le altezze AE ed AI sono incommensurabili, i volumi dei due corpi AG ed AL non sono niente meno nel rapporto di quest' altezze; e per dimostrarlo, si può impiegare il modo di dimostrazione del (n.° 38).

147. *Due parallelepipedi rettangoli che hanno la medesima altezza stanno fra loro come le basi.* (fig. 115)

Per dimostrare questa proposizione, supponghiamo che i parallelepipedi AG, IO, che hanno l' istessa altezza AE, abbiano le loro facce BG, CO adiacenti e comprese fra le medesime parallele BL, FO. Prolungando respettivamente le rette MN, IK fino in P ed in R, si formerà un nuovo parallelepipedo RG, che avrà la medesima base del parallelepipedo AG e del parallelepipedo IO. Ora secondo il teorema precedente,

$$\text{vol. } RG : \text{vol. } AG :: IC : AB,$$
$$\text{vol. } IO : \text{vol. } RG :: IK : CB.$$

Moltiplicando queste due proporzioni per ordine, ed omettendo il fattore comune vol. RG, avremo

$$\text{vol. } IO : \text{vol. } AG :: IC \times IK : AB \times BC;$$

ma $IC \times IK =$ area $ICLK$, ed $AB \times BC =$ area $ABCD$; dunque due parallelepipedi della medesima altezza, stanno fra loro come le loro basi.

148. *Due parallelepipedi rettangoli qualunque, stanno fra loro come i prodotti delle loro basi per le loro altezze, o come i prodotti delle loro tre dimensioni.* (fig. 116)

1.ª *Dimostrazione.* Siano i due parallelepipedi rettangoli AG, IO che si considerano. Se si forma il parallelepipedo IQ, avremo per gli ultimi due teoremi,

$$\text{vol. } AG : \text{vol. } IQ :: ABCD : ICLK,$$
$$\text{vol. } IQ : \text{vol. } IO :: IS : IM;$$

dunque moltiplicando per ordine e riducendo, si ha
vol. AG : vol. IO :: $ABCD \times IS$: $ICLK \times IM$
:: $AB \times BC \times IS$: $IC \times CL \times CN$.

D' onde ne segue e per analogia con quello che abbiamo detto al n.° 70, che si può prendere per misura d'un parallelepipedo rettangolo, il prodotto della sua base per la sua altezza, o il prodotto delle sue tre dimensioni. Infatti se si prende per unità di misura lineare una delle costole di un *cubo*, e che le tre costole contigue d'un altro parallelepipedo rettangolo siano 3, 5, 9 volte quest' unità, questi due corpi staranno fra loro. :: 1 : 135, o ciò che torna lo stesso, il cubo preso per unità di volume, sarà contenuto 135 volte nel parallelepipedo: questo è quello che si deve intendere quando si dice, per abbreviare, che il *volume d'un parallelepipedo rettangolo è eguale al prodotto delle sue tre costole contigue, o al prodotto della sua base per la sua altezza.* Così il volume d'un esaedro regolare è eguale al cubo d'uno dei suoi lati.

2.ª *Dimostrazione.* Si dimostrerebbe questa proposizione immediatamente come segue, nel caso in cui le dimensioni del parallelepipedo rettangolo fossero commensurabili.

Supponghiamo che il lato del cubo preso per unità di misura sia contenuto, per esempio, 5 volte nella lunghezza AD, 3 volte nella larghezza AB, ed 8 volte nell' altezza AE. È evidente che si potrebbero porre 15 cubi in tutta l'estensione della base $ABCD$, ed 8 cubi nel senso dell' altezza AE: dunque il parallelepipedo rettangolo ne conterrà un numero espresso da $15 \times 8 = 120$; dunque in generale il volume d'un parallelepipedo rettangolo è eguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

Se ne deduce la conseguenza, che il volume d'un parallelepipedo qualunque, ed in generale d'un prisma è eguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

149. *Due tetraedri di basi equivalenti, e della medesima altezza sono equivalenti.* (fig. 17)

1.ª *Dimostrazione.* Siano nel tetraedro $SABC$ un certo numero di prismi eccedenti $ABCDEF$, ec...., e di prismi deficienti $IBKGEH$, ec..., avendo tutti la medesima altezza: ci sia pure il medesimo numero di prismi nel secondo tetraedro. Si dimostrerà facilmente che in ogni tetraedro la differenza dei prismi eccedenti sui prismi interni, che è eguale al primo prisma eccedente $ACBDFE$,

può divenire minore di qualsivoglia quantità data, e per conseguenza che la differenza fra un tetraedro e la somma dei prismi eccedenti, può essere tanto piccola quanto si vorrà.

Ciò posto sia T il tetraedro $SABC$, t il tetraedro $sabc$, P e p i prismi esterni respettivi, e supponghiamo che T sia diverso da t. Moltiplicando convenientemente gli strati, si renderà

$$p - t < T - t, \text{ ed allora si avrà } p < T;$$

ma $p = P$ poichè per ipotesi, le basi ABC, abc sono equivalenti, e le altezze SX, sx, sono eguali; dunque $P < T$: conseguenza assurda, poichè la somma dei prismi esterni è necessariamente maggiore del tetraedro corrispondente. Dunque i due tetraedri non possono essere disuguali di volume.

2.ª *Dimostrazione*. Risulta dal teorema del n.° 143 che se nelle due piramidi che si considerano, si formano delle sezioni ad eguali distanze dalle basi, e che gli siano parallele, le sezioni corrispondenti saranno equivalenti. Se s' immagina dunque un' infinità di sezioni in ognuna di queste piramidi, e nell' istesso numero, quelle che apparterranno ad una piramide costituiranno il suo volume; d' onde si deve conchiudere che queste piramidi sono equivalenti.

150. *Un tetraedro è equivalente al terzo del prisma triangolare della medesima base e della medesim' altezza.* (fig. 118)

Sia $ACBF$ il tetraedro di cui si tratta. Terminiamo il prisma $ABCDEF$, e per i punti A, F, E, conduchiamo un piano AFE, che dividerà la piramide quadrangolare $ADEBF$ in due piramidi triangolari $ADEF$, $ABEF$.

Le due piramidi $ACBF$, $DFEA$, avendo la medesim' altezza e delle basi uguali ACB, DEF, sono equivalenti. Parimente le due piramidi $DAEF$, $AEBF$ sono equivalenti, perchè le loro basi eguali ADE, AEB sono sopra un medesimo piano, e che i loro vertici sono sul medesimo punto F: dunque le tre piramidi che compongono il prisma sono equivalenti fra loro; il tetraedro dunque $ACBF$ è il terzo d' un prisma della medesima base e della medesim' altezza.

Da ciò, e dal n.° 148 ne risulta questa conseguenza, che *una piramide triangolare, ed in generale che ogni piramide ha per misura il terzo del prodotto della sua base per la sua altezza.*

Poichè, per esempio, (fig. 119), la piramide pentagona $SABCDE$ è eguale alla somma di tre tetraedri parziali $SABC$, $SACD$, $SADE$.

151. *Ogni piramide triangolare troncata o tagliata da un piano parallelo alla sua base, è equivalente a tre piramidi, che avrebbero per altezza comune quella del tronco, e di cui l'una avrebbe per base la base inferiore del tronco, l'altra la base superiore, e la terza una media proporzionale fra queste due basi.* (fig. 120)

Per il punto C', vertice d'uno degli angoli della base superiore del tronco, conducete $C'D$ parallela alla costola AA'; unite DB, e conducete la retta AB'.

È manifesto primieramente che la piramide troncata è composta di tre piramidi intiere $ACBC'$, $A'C'B'A$, ed $AB'BC'$; la prima avendo per base il triangolo ABC, la seconda il triangolo $A'B'C'$, ed avendo ambedue per altezza quella del tronco. In quanto alla terza $AB'BC'$, essa ha per base il triangolo $AB'B$, ed il suo vertice è in C'; così essa è equivalente ad un'altra piramide che avrebbe la medesima base, ed il cui vertice sarebbe in D, a causa che $C'D$ è parallela ad AA'. Ma quest'ultima piramide potendo essere considerata, come avendo per base il triangolo ABD, e per vertice il punto B', avrà pure la medesima altezza del tronco. Resta dunque a far vedere che il triangolo ABD è medio proporzionale fra ABC ed $A'B'C'$.

Ora i triangoli ABD, ABC che hanno la medesim' altezza, stanno fra loro come le loro basi AD, AC; si ha dunque.

$$\overline{ABD}^2 : \overline{ABC}^2 :: \overline{AD}^2 : \overline{AC}^2 :$$

da un altro canto i triangoli simili ABC, $A'B'C'$ danno

$$A'B'C' : ABC :: \overline{A'C'}^2 \text{ ossia } \overline{AD}^2 : \overline{AC}^2 ;$$

a causa dunque del rapporto comune,

$$\overline{ABD}^2 : \overline{ABC}^2 :: A'B'C' : ABC;$$

dunque finalmente,

$$\overline{ABD}^2 = ABC \times A'B'C' \text{ ossia } A'B'C' : ABD :: ABD : ABC$$

risultamento che compisce di dimostrare la proposizione enunciata.

Questa proprietà della piramide triangolare troncata, ha luogo egualmente per ogni piramide troncata a basi paralle le.

Digitized by Google

152. *Se si taglia un prisma triangolare con un piano inclinato alla base, il corpo rimanente sarà equivalente alla somma di tre piramidi che avrebbero la medesima base del prisma, ed i cui vertici sarebbero quelli degli angoli della sezione.* (fig. 121)

Sia DEF non parallelo ad ABC. Se si conducano i piani AFB, AFE, il prisma triangolare sarà evidentemente decomposto in tre piramidi. La prima ha per base ABC, e per vertice il punto F; la seconda piramide $AEBF$ che ha per base AEB, e per vertice F, è equivalente alla piramide $AEBC$, il cui vertice è in C; questa però può avere per base ABC, e per vertice E. La terza piramide $ADFE$ può essere prima cangiata in $ADFB$, quindi quest' ultima può esserlo in $ADBC$: ma la piramide $ADBC$ ha se si vuole, per base ACB, e per vertice D; dunque il prisma troncato $ACBDFE$ si decompone come lo porta l' enunciato del teorema.

Se le costole AD, CF, BE fossero perpendicolari alla base ABC, l' espressione del volume del prisma sarebbe per conseguenza $= ABC \frac{(AD + CF + BE)}{3}$; d' onde ne segue che ogni prisma triangolare ha per misura il prodotto della sezione perpendicolare alle tre costole parallele, per il terzo della somma di quest' istesse costole.

CAPITOLO V.

DELLA SIMILITUDINE DEI POLIEDRI.

153. Due corpi qualunque terminati da dei piani, sono detti *simili*, quando sono compresi sotto un numero eguale di piani simili, e che hanno gli angoli poliedri respettivamente eguali.

Da questa definizione risulta, che *le costole omologhe di due poliedri simili sono proporzionali, e che le loro facce omologhe stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi*; ne segue inoltre che *questi poliedri possono essere decomposti in un medesimo numero di piramidi triangolari respettivamente simili, e disposte nel medesimo senso.*

Queste conseguenze sono rigorosamente dimostrate nella geometria di Legendre ed in quella di Lacroix. I limiti di questo compendio non ci permettono d'entrare in particolarità su questo punto.

154. *Due piramidi simili stanno fra loro come i cubi delle loro costole o linee omologhe.* (fig. 122)

Poichè nei poliedri simili, le facce omologhe stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi, si ha supponendo che SP ed $S'P'$ siano respettivamente le altezze delle piramidi $SABC$, $S'A'B'C'$.

$$ABC : A'B'C' :: \overline{SP}^2 : \overline{S'P'}^2 ;$$

moltiplicando questa proporzione per la seguente, che è identica,

$$\frac{SP}{3} : \frac{S'P'}{3} :: SP : S'P' ;$$

si ottiene

$$ABC \times \frac{SP}{3} : A'B'C' \times \frac{S'P'}{3} :: \overline{SP}^3 : \overline{S'P'}^3 ;$$

ma $ABC \times \frac{SP}{3}$ è la misura del volume della piramide $SABC$, ed $A'B'C' \times \frac{S'P'}{3}$ è parimente la misura del volume della piramide $S'A'B'C'$; dunque queste due piramidi simili stanno fra loro come i cubi delle loro altezze, o in generale come i cubi dei loro lati omologhi.

Si può da ciò provare, procedendo come al n.° 82, che *due poliedri simili stanno pure come i cubi dei lati omologhi.*

CAPITOLO VI.

DEI CORPI TONDI E DELLE LORO PRINCIPALI PROPRIETA'.

155. I corpi tondi sono prodotti dalla rivoluzione d'una superficie piana, che s'immagina girare attorno ad una linea retta. I tre corpi tondi dei quali specialmente ci occupiamo in Geometria, sono il *cilindro* retto, il *cono* retto, e la *sfera.*

Un *cilindro* retto, (fig. 123), è un corpo generato da un rettangolo, che gira attorno ad uno dei suoi lati, che

chiamasi *l' asse*. In questo movimento, i lati perpendicolari all' asse descrivono dei circoli eguali, che chiamansi le *basi* del cilindro, così il cilindro AB', ha per basi i circoli AC, $A'C'$, e per asse la retta CC'.

In generale, una retta, che è obbligata a girare attorno ad una curva qualunque, ed a restare costantemente parallela alla sua posizione primitiva, genera una superficie cilindrica. Se la curva che dirige il movimento di questa retta, che chiamasi *generatrice* è un circolo, e che questa generatrice sia obliqua al piano di questo circolo, il cilindro sarà obliquo.

Nel cilindro a basi circolari parallele, è evidente che tutte le sezioni parallele a queste basi sono circoli eguali ognuno ad una di queste basi. Non è meno evidente che ogni sezione per l' asse è un parallelogrammo.

156. Si chiama *cono retto* (fig. 124) il corpo generato dalla rivoluzione d' un triangolo rettangolo che gira attorno ad uno dei lati dell' angolo retto; lato che per questa ragione, dicesi *l' asse*. Così SA è l' asse del cono retto $SABDC$. La linea BS che genera la superficie curva di questo cono, è denominata la *generatrice*.

La *base* di questo corpo è il circolo BDC descritto dal lato AB del triangolo generatore SAB, ed il suo vertice è il punto S.

(fig. 125) In generale una retta che è assoggettata a passare per il medesimo punto, ed a percorrere una curva qualunque, genera una superficie conica. Se la curva che dirige il movimento della generatrice è un circolo, e che l' asse non sia perpendicolare al piano di questa curva, il cono prende il nome di *cono obliquo a base circolare*.

Segue dalla generazione del cono; 1.° che ogni sezione parallela alla base è un circolo; 2.° che ogni sezione fatta per l' asse è un triangolo.

Siccome i circoli sono figure simili (n.° 83), e che i raggi delle sezioni di cui si tratta sono proporzionali alle distanze dai loro centri al vertice del cono, ne segue che le arce di queste sezioni circolari stanno fra loro come i quadrati di queste distanze; dunque,

$$\text{circolo } AB : \text{circolo } ab :: \overline{SA}^2 : \overline{Sa}^2.$$

Si ottengono dalle sezioni diverse curve, secondo la posizione del piano segante riguardo al lato SB del cono. La discussione di queste curve è a propriamente parlare di competenza dell' applicazione dell' Algebra alla Geometria.

157. La *sfera* è un corpo terminato da una superficie curva, della quale tutti i punti sono egualmente lontani da un punto interno che si chiama *centro*.

(fig. 126) Si può concepire essere la sfera prodotta dalla rivoluzione d'un mezzo circolo che gira attorno al suo diametro. Così ogni sezione della sfera fatta da un piano che passi per il centro, è un circolo eguale al circolo generatore. Tal è il circolo *ADB*, il cui centro *C* è nel medesimo tempo quello della sfera. Questo circolo chiamasi anche *circolo massimo* della sfera.

In generale ogni piano che penetra la sfera, taglia la sua superficie secondo una circonferenza di circolo: si chiama *circolo minimo* o *minore*, quello il cui piano non passa per il centro: *MNEN'M'*, per esempio è un circolo minore.

Il *polo* d'un circolo della sfera, è un punto della superficie egualmente lontano da tutti i punti della circoferenza di questo circolo. È visibile che un circolo massimo o minimo ha due poli situati sulla retta perpendicolare a questo circolo e che passa per il centro. Così il punto *P* è tanto il polo del circolo massimo *ADB* che del circolo minimo *MNE*.

Due circoli massimi della sfera si tagliano necessariamente in due parti eguali, poichè la loro intersezione passando per il centro è un diametro.

Due punti presi sulla sfera, che non sono diametralmente opposti, determinano la posizione d'un circolo massimo: poichè questi due punti ed il centro della sfera determinano la posizione d'un piano.

(fig. 127) La porzione *CAEBC* della superficie della sfera, compresa fra due mezzi circoli massimi che si tagliano, dicesi *fuso sferico;* e la parte del volume della sfera compresa fra i piani *EAC*, *EBC* dei due semigrancircoli, chiamasi *unghia sferica.*

Tre circoli che si tagliano due a due sulla sfera, formano un *triangolo sferico*. I lati d'un tal triangolo possono essere formati da archi di circoli massimi o di circoli minimi; ma comunemente non si considerano che i triangoli sferici i cui lati sono degli archi di circoli massimi, minori d'una mezza circonferenza. Da ciò ne segue e dal teorema del n.° 135, che la somma dei due lati d'un triangolo sferico, è sempre maggiore del terzo.

In fatti gli archi *AB*, *BC*, *AC* misurano gli angoli piani *AOB*, *COB*, *AOC* che compongono l'angolo triedro *O*, il cui vertice è al centro della sfera, e due di questi angoli presi insieme sono maggiori del terzo.

Una *zona* è una parte di superficie della sfera, compresa fra due piani paralleli che ne sono le basi. Se uno di questi piani è tangente alla sfera, la zona non ha che una base, e diecsi anche *callotta sferica.*

Il *segmento sferico* è la porzione del volume della sfera, compresa fra due piani paralleli che ne sono le basi.

L'*asse* o l'*altezza* d'una zona o d'un segmento, è la distanza dei due circoli paralleli, che sono le basi della zona, o del segmento.

Un *settore sferico* è un corpo generato dalla rivoluzione d'un settore circolare, che gira attorno ad uno dei suoi raggi.

Un piano è *tangente* alla sfera, quando non ha che un solo punto di comune colla sua superficie. (fig. 129)

Un poliedro è detto circoscritto alla sfera, quando le sue facce sono tangenti a questa sfera.

158. *Il più corto cammino da un punto ad un altro sulla sfera, è l'arco di circolo massimo che unisce questi due punti.* (fig. 128)

Sia AMB l'arco del circolo massimo che unisce i punti A e B; e sia se è possibile, N un punto della linea la più corta fra A e B. Per il punto N, conducete gli archi dei circoli massimi NA, NB, e prendete $AM = AN$. Secondo il (n.° precedente), si ha $AM + MB < AN + NB$, o riducendo $MB < NB$. Ora la più corta distanza da A ad N, di qualunque natura essa sia, è eguale alla più corta distanza da A in M; dunque le due strade per AMB e per ANB hanno una parte eguale, ma la strada per ANB è per ipotesi la più corta; dunque la distanza da N in B è più piccola di quella d'M in B, ciò che è assurdo, poichè l'arco NB è maggiore dell'arco MB; dunque verun punto della linea la più corta fra A e B tracciata sulla sfera, non può essere fuori dell'arco del circolo massimo AMB; dunque finalmente quest'arco è lui stesso la più corta distanza fra le sue estremità.

(fig. 129) L'angolo che fanno fra loro due archi di circoli massimi, è eguale all'angolo formato dalle tangenti di quest'archi al medesimo punto; per esempio l'angolo TPT' formato dalle rette TP, $T'P$ perpendicolari alla sezione comune dei circoli PAP', $PA'P'$ e condotte da ognuno di essi, è l'angolo stesso di questi circoli. Quest'*angolo sferico* ha pure per misura l'arco AA', descritto dal punto P come polo, fra i due lati AP, $A'P$ prolungati se fa d'uopo, e con un raggio eguale al lato del quadrato inscritto.

Digitized by Google

159. *Ogni piano perpendicolare all' estremità del raggio è tangente alla sfera.*

Se il piano TPT' è perpendicolare all' estremità del raggio CP, ogni punto T preso su questo piano, sarà evidentemente fuori della sfera, poichè $CT > CP$; dunque il piano TPT' non ha che un solo punto di comune colla superficie della sfera: è dunque tangente a questa superficie. Da ciò risulta che quando due sfere si toccano, i loro centri ed i punti di contatto sono sopra una medesima linea retta.

CAPITOLO VII.

MISURA DELL' AREA DEI CORPI TONDI.

160. *Ogni superficie convessa è minore d' un' altra superficie qualunque che circonderebbe la prima appoggiandosi sul medesimo contorno.* (fig. 130)

S' intende per *superficie convessa*, quella che non può essere traversata da una retta in più di due punti. Sia $OABCD$ quella che si considera: se non è essa la minore di tutte quelle che la circondano, ci sia fra queste una superficie $PABCD$ minore o che sarà al più eguale ad $OABCD$. Per un punto qualunque O fate passare un piano MN tangente alla superficie $OABCD$; questo piano incontrerà la superficie $PABCD$, e la parte che ne torrà sarà evidentemente maggiore del piano terminato alla medesima superficie; dunque la nuova superficie circondante sarebbe minore della prima $PABCD$; ma per ipotesi è questa la minore di tutte; dunque quest' ipotesi non può sussistere: dunque ec.

Da questo principio ne derivano le seguenti conseguenze.

1.° Se una superficie convessa, terminata da due contorni, come lo sono, per esempio, le superficie cilindriche, è circondata da un' altra superficie qualunque terminata ai medesimi contorni, la superficie circondata sarà la minore.

2.° Se una superficie convessa, la sfera per esempio, è circondata da tutte le parti da un' altra superficie, la superficie circondata sarà sempre minore della superficie circondante.

3.° Si può concepire un poliedro circoscritto alla sfera, e la cui superficie, come pure il volume, differiscano

tanto poco quanto si vorrà dalla superficie minore e dal volume minore di questa sfera.

161. *L' area della superficie curva d' un cilindro retto è eguale al prodotto della circonferenza della sua base per la sua altezza.* (fig. 131)

Sia CA il raggio della base del cilindro retto, e CB la sua altezza. Considerando un prisma circoscritto a questo cilindro, si potranno moltiplicare le sue facce laterali, in modo che le loro aree prese insieme eccedino l'area della superficie curva del cilindro, d' una quantità minore d' una grandezza qualunque data. Nella medesima circostanza il contorno della base del prisma differirà dalla circonferenza della base del cilindro, d' una quantità che sarà minore d' ogni altra assegnabile. Se P dunque indica il perimetro del poligono che serve di base al prisma circoscritto, e che H sia l' altezza comune del prisma e del cilindro, l' area del primo corpo senza comprenderci le basi, sarà $P \times H$. Questa quantità variabile avendo alla volta per limiti inferiori, $C \times H$ ed S; C essendo la circonferenza del circolo CA, ed S essendo l' area cercata; avremo per il n.° 75 $S = C \times H$. Questa conseguenza si verifica di nuovo, considerando che lo *sviluppo* della superficie d' un cilindro retto, è rappresentato da un rettangolo la cui base ed altezza sono respettivamente la circonferenza e l' altezza del cilindro.

162. *L' area della superficie curva d' un cono retto è eguale alla metà del suo lato, moltiplicato per la circonferenza della sua base.*

Concepite come nella dimostrazione precedente, una piramide della medesim' altezza del cono, e che gli sia circoscritta. L' area della piramide sarà sempre maggiore di quella del cono; poichè se si soprammette base a base la piramide ad una piramide eguale, il cono ad un cono eguale, la superficie delle due piramidi circonderà da tutte le parti la superficie dei due coni: dunque la prima superficie sarà maggiore della seconda; dunque la superficie del cono è minore di quella della piramide circoscritta.

Ciò posto, se H è il lato del cono, o la perpendicolare abbassata dal vertice sopra uno dei lati del poligono circoscritto alla base, e che P sia il perimetro di questo poligono, l' area della piramide circoscritta sarà $= \frac{P \times H}{2}$.

Ma questa quantità variabile ha per limiti inferiori $\frac{C \times H}{2}$, ed S, essendo C la circonferenza della base del cono, ed S l'area cercata; dunque (n.° 75), $S = \frac{C \times H}{2}$.

Lo sviluppo della superficie curva d'un cono retto, è visibilmente rappresentato da un settore circolare il cui raggio è eguale al lato del cono, ed il cui arco è eguale alla circonferenza della base di questo corpo.

163. *La misura della superficie convessa d'un tronco di cono retto a basi parallele, è eguale alla semisomma delle circonferenze delle due basi, moltiplicata per il lato del tronco.* (fig. 132)

Sia $ABEF$ il cono troncato che si considera. Fate BH perpendicolare ad SB ed eguale a circ. CB; unite SH. Per il punto E conducete EK parallela a BH, e per il mezzo M di EB, conducete anche MN parallela a BH.

Risulta da questa costruzione che EK è eguale a circ. DE, e che $MN =$ circ. QM; infatti a causa dei triangoli simili SDE, SCB, si ha,

$$SE : SB :: DE : CB :: \text{circ. } DE : \text{circ. } CB.$$

Di più i triangoli simili SEK, SBH danno

$$SE : SB :: EK : BH.$$

dunque,

$$\text{circ. } DE : \text{circ. } CB :: EK : BH.$$

Ma $BH =$ circ. CB, dunque $EK =$ circ. DE. Si proverebbe pure che $MN =$ circ. QM.

Ciò posto, siccome l'area del triangolo SBH è eguale all'area del cono intiero ASB, e che l'area del triangolo SEK è eguale a quella del cono SFE, è chiaro che l'area del tronco $ABEF =$ l'area del trapezio $EBHK$. L'area dunque del tronco, senza comprenderci le basi,

$$= \left(\frac{\text{circ. } CB + \text{circ. } DE}{2}\right) \times BE.$$

Si può anche dire che l'area d'un tronco di cono è eguale al suo lato, moltiplicato per la circonferenza d'una sezione fatta ad egual distanza dalle due basi; poichè MN o circ. $QM = \left(\frac{\text{circ. } CB + \text{circ. } DE}{2}\right)$.

164. *L'area d'un corpo generato dal movimento d'un mezzo poligono regolare inscritto ad un mezzo circolo*

Digitized by Google

che gira attorno al diametro, ha per misura il prodotto di questo diametro per la circonferenza del circolo il cui raggio sarebbe l'apotema del poligono. (fig. 133)

Sia $ABCDE\ldots\ H$, il semipoligono regolare inscritto. Dai punti B, C, e dal mezzo I di CB, abbassate sul diametro AH le perpendicolari BK, CL, IN. Per il punto B, conducete BM parallela ad AH, ed unite IO, essendo O il centro del poligono.

I triangoli CBM, NIO, avendo i lati respettivamente perpendicolari, sono simili (n.° 51);

$$CB : IO :: BM : IN \text{ ossia } CB : \text{circ. } IO :: BM : \text{circ. } IN;$$

e per conseguenza,

$$CB \times \text{circ. } IN = BM \times \text{circ. } IO.$$

Il lato CB, volgendosi attorno al diametro AH, genera la superficie curva d'un cono troncato, e questa superficie ha per misura $CB \times$ circ. IN (n.° 163). Dunque essa ha pure per misura $BM \times$ circ. IO.

Da ciò ne segue che la zona del solido di rivoluzione, generata da uno dei lati del poligono generatore, ha per misura il prodotto dell' altezza di questa zona per la circonferenza del circolo che avrebbe IO per raggio; dunque l' area del volume intiero è eguale al diametro AH moltiplicato per la circonferenza IO.

165. *L'area della sfera ha per misura il prodotto del suo diametro, per la circonferenza d' un circolo massimo.* (fig. 134)

1.ª *Dimostrazione.* Se al circolo massimo della sfera si circoscrive un poligono regolare $MNPQRS$, d' un numero pari di lati, la superficie descritta da questo poligono avrà per misura $MS \times$ circ. AC (n.° precedente). Ora questa superficie è maggiore di quella della sfera CA; ma la differenza può essere anche resa tanto piccola quanto si vorrà aumentando convenientemente il numero dei lati del poligono generatore (n.° 160). Nel medesimo caso, la diagonale MS sorpasserà il diametro AB, d' una quantità più piccola d' ogni grandezza data; così le tre quantità $MS \times$ circ. AC, $AB \times$ circ. AC, e l'area cercata S, sono nelle medesime circostanze delle tre grandezze X, A, B del n.° 75; dunque,

$$S = AB \times \text{circ. } AC.$$

2.ª *Dimostrazione*. Se si suppone la superficie della sfera divisa in un'.infinità di zone a basi parallele, queste zone potranno essere considerate, senza rimarchevole errore, come quelle d' un solido di rivoluzione, che avrebbe per grossezza il diametro della sfera. Sarà dunque permesso il sostituire questo solido alla sfera; dunque per il teorema precedente, l' area della sfera è eguale al prodotto del suo diametro per la circonferenza d'uno dei suoi circoli massimi.

La superficie d'un circolo massimo si misura moltiplicando la sua circonferenza per la metà del raggio, e l'area della sfera è eguale al prodotto di quest' istessa circonferenza per il diametro; dunque *l' area della sfera è quadrupla di quella d' uno dei suoi circoli massimi*, ossia è eguale a $4\pi R^2 = \pi D^2$, essendo R e D respettivamente il raggio ed il diametro della sfera, e π indicando la mezza circonferenza d' un circolo il cui raggio è $=1$.

Si conchiude da ciò e con un metodo analogo a quello del n.° 76; 1.° che l' area d' una zona ad una o due basi, è eguale al prodotto della sua altezza per la circonferenza d'un circolo massimo della sfera a cui questa zona appartiene; 2.° che la superficie del fuso è eguale all' arco che misura l' angolo di questo fuso, moltiplicato per il diametro, poichè il fuso sta alla superficie della sfera, come l' arco di questo fuso sta alla circonferenza intiera.

CAPITOLO VIII.

MISURA DEL VOLUME DEI CORPI TONDI.

166. *Il volume d' un cilindro retto o obliquo è eguale al prodotto della sua base per la sua altezza.* (fig. 131)

Considerando un prisma circoscritto al cilindro ACB, il cui volume differisce tanto poco quanto piacerà da quello di questo corpo tondo, la base del prisma avrà per limite la base stessa del cilindro: così indicando per P l'area del poligono circoscritto, e per H l' altezza del prisma che ha per base questo poligono, il prodotto $P \times H$ sarà la misura del volume di questo corpo, ed avrà per limiti inferiori, sup. $AC \times H$ e V ossia il volume del cilindro; la vera misura dunque di questo cilindro sarà,

$$V = \text{sup. } AC \times H.$$

167. *Il volume d' un cono qualunque ha per misura il prodotto della sua base per il terzo della sua altezza.* (fig. 125)

Sia indicata per P, l'area del poligono circoscritto alla base del cono; per H l'altezza di questo corpo. Si concepisce che il volume della piramide che ha per base il poligono di cui si tratta, e per altezza quella del cono può oltrepassare di tanto poco quanto si vorrà il volume di questo cono: adesso il volume della piramide $= \frac{P \times H}{3}$; se dunque V è la vera misura del cono, e che AC sia il raggio della sua base, il prodotto $\frac{P \times H}{3}$ avrà per limiti inferiori sup. $AC \times \frac{H}{3}$ e V; dunque come precedentemente,

$$V = \text{sup. } AC \times \frac{H}{3}.$$

Nota. Si dimostrebbero anche immediatamente i due teoremi precedenti, colla considerazione seguente: Se alla base del cilindro si sostituisce un poligono regolare circoscritto, d'un numero infinito di lati, e che si consideri questo poligono come la base d'un prisma che abbia la medesima altezza del cilindro, questo prisma potrà essere preso per questo cilindro. Si potrà parimente rimpiazzare un cono con una piramide circoscritta che avesse pure la medesim' altezza di questo corpo; dunque ec.

168. *Il volume d'un tronco di cono è equivalente a tre coni intieri che avessero ognuno la medesim' altezza del tronco, e di cui l' uno avesse per base, la base inferiore del tronco; l' altro la base superiore; ed il terzo cono, una media proporzionale fra quelle due basi.* (fig. 125)

Per concepire la verità di questo teorema, basta immaginare un tronco di piramide triangolare, che abbia la medesima altezza del cono troncato, e le cui basi siano equivalenti a quelle di questo cono; poichè allora i volumi di questi due tronchi saranno equivalenti fra loro, e la misura dell' uno sarà quella dell' altro. Questa proposizione ritorna dunque a quella del n.° 151.

169. *Il volume d' una sfera è eguale al prodotto della sua superficie per il terzo del suo raggio.* (fig. 134)

1.ª *Dimostrazione.* Immaginiamo che il mezzo poligono $MNPQRS$ giri attorno al diametro AB; i lati PN, PQ... genereranno dei coni troncati; ed i lati MN, RS dei coni

intieri, di modo che il tutto formerà un solido di rivoluzione circoscritto alla sfera del raggio AC. Immaginiamo inoltre un sistema di piramidi circoscritte ad ognuno di questi coni, ed un altro sistema di piramidi che abbiano per vertice comune il centro della sfera, e per base le facce stesse delle prime piramidi; allora il volume del poliedro circoscritto formato dall'uno o dall'altro sistema avrà per misura $S \times \frac{R}{3}$, indicando S l'area di questo poliedro, ed essendo R il raggio della Sfera. Ora egli è possibile aumentare il numero dei lati del poligono generatore del solido di rivoluzione, siccome quello delle piramidi d'ogni sistema, di modo che i volumi del solido di rivoluzione, del poliedro circoscritto e della sfera, differiscono fra loro d'una quantità tanto piccola quanto si vorrà; le tre quantità $S \times \frac{R}{3}$, sup. $R \times \frac{R}{3}$, V corrispondono dunque a tre altre X, A, B, del n.° 75, dunque la vera misura del volume della sfera è,

$$V = \text{sup. } R \times \frac{R}{3}.$$

2.a *Dimostrazione*. Se si suppone che la superficie della sfera sia decomposta in un'infinità di triangoli infinitamente piccoli, e che le loro superficie siano le basi d'altrettante piramidi che abbiano per vertice comune il centro della sfera, il volume d'ognuna di queste piramidi sarà eguale all'area della sua base per il terzo della sua altezza, o il terzo del raggio della sfera; la somma dunque dei volumi di tutte queste piramidi, o il volume della sfera è eguale al prodotto della sua superficie per il terzo del suo raggio.

Se D esprime il diametro, avremo n.° 75, sup. $R = \pi D^2$;

pertanto, $V = \frac{1}{6} \pi D^3$.

Si deduce inoltre dai precedenti principii *che il volume d'un settore sferico ha per misura la zona che gli serve di base, moltiplicata per il terzo del raggio.*

170. *Ogni segmento sferico ad una sola base è equivalente ad un cilindro che avrebbe per raggio della sua base la grossezza di questo segmento, e per altezza il raggio della sfera, diminuito del terzo della grossezza di cui si tratta.* (fig. 135)

Il volume del segmento terminato dalla callotta sferica ADB, è evidentemente eguale al volume del settore sferico $AOBD$ meno il volume del cono ABO, che ha per base quella del segmento.

Ora se si fa $CD = h$, ed $AO = R$ il volume del settore sarà $=$ super. della callotta $ADB \times \frac{1}{3} AO = 2\pi R h \times \frac{R}{3}$ $= \frac{2}{3}\pi R^2 h$, (n.i 64, 169);

Da un altro canto il volume del cono $AOB =$ sup. $CA \times \frac{1}{3} CO = \pi \overline{CA}^2 \times \frac{1}{3} CO = \pi (2R - h) h \times \frac{1}{3}(R - h)$ $= \frac{\pi}{3} h (2R - h)(R - h)$, (n.i 54 e 75);

Il volume dunque del segmento sferico ad una sola base $= \frac{2}{3}\pi h R^2 - \pi h (2R - h)(R - h) = \pi h^2 (R - \frac{1}{3} h)$, ciò che prova la proposizione enunciata.

171. *Il volume d' un segmento sferico a due basi parallele, ha per misura la semisomma di queste basi moltiplicata per la sua grossezza, più il volume della sfera di cui questa medesima grossezza è il diametro.* (fig. 136)

Sia $DD'EE'$ il segmento di cui si tratta d' avere il volume; M il mezzo dell' arco DME; $DO = R$ il raggio della sfera; $MN = h$, $MN' = h'$ le grossezze respettive dei segmenti DME, $D'ME'$; finalmente $DN = y$, $D'N' = y'$ i raggi delle basi del segmento sferico da misurare.

Il segmento sferico DME ha per misura, $\pi h^2 (R - \frac{1}{3} h)$;
ed il segmento $D'ME'$ . . . . $\pi h'^2 (R - \frac{1}{3} h')$.

Il volume dunque del segmento $DD'EE'$ che si considera è,

$$V = \pi R (h^2 - h'^2) - \frac{1}{3}\pi (h^3 - h'^3).$$

Sia z la grossezza NN' di questo segmento, avremo $z = h - h'$, ed allora l' espressione precedente diverrà.

$$V = \pi z [R (h + h') - \frac{1}{3} (h^2 + h'h + h'^2)];$$

ma per la proprietà del circolo (n.° 54),

$$y^2 = 2Rh - h^2, \; y'^2 = 2Rh' - h'^2;$$

sommando quest' equazioni viene,

$$y^2 + y'^2 = 2R\,(h + h') - (h^2 + h'^2);$$

d' onde si deduce,

$$R\,(h + h') = \frac{y^2 + y'^2 + h^2 + h'^2}{2},$$

sostituendo finalmente questo valore in quello di V si ha

$$V = \pi\, z \left[\frac{y^2 + y'^2}{2} + \frac{(h - h')^2}{6}\right]$$

$$= z.\ \frac{\pi\, y^2 + \pi\, y'^2}{2} + \frac{\pi\, z^3}{6},$$

risultamento conforme all' enunciato della proposizione.

CAPITOLO IX.

PARAGONE DEI CORPI TONDI, POLIEDRI REGOLARI, SIMILITUDINE DEI CORPI TONDI.

172. I corpi tondi simili, son quelli che hanno tutte le loro linee omologhe proporzionali; così i cilindri o i coni retti sono simili, quando i rettangoli o i triangoli rettangoli generatori sono simili. Le sfere lo sono dunque essenzialmente.

Da questa similitudine, necessariamente risulta che le superficie dei corpi tondi simili, stanno fra loro come i quadrati delle linee omologhe, e che i loro volumi sono proporzionali ai cubi delle linee omologhe. Queste proprietà si provano con ragionamenti analoghi a quelli dei n.i 81 ed 83.

Quando si paragona la sfera al cilindro circoscritto, si vede, 1.° che la superficie curva di questo cilindro è equivalente a quella della sfera; 2.° che la superficie totale del cilindro circoscritto, sta a quella della sfera come 3 : 2. Quest' è parimente il rapporto ch' esiste fra i volumi di questi due corpi.

Definizioni dei Poliedri regolari.

173. Ci resterebbero a considerare i *poliedri regolari* che godono proprietà rimarchevoli, cioè i poliedri terminati

Digitized by Google

Si troveranno ai n.i 71, 84 dell'Algebra le soluzioni di diversi altri problemi di geometria. Nulla possono fare di meglio gli Alunni che di ricorrerci, perchè si familiarizzeranno di più coi principii di questa scienza, e ne faranno delle utili applicazioni.

CAPITOLO X.

MISURA DEI VOLUMI DEI CORPI CHE COSTITUISCONO LE OPERE DI FORTIFICAZIONE.

174. Nelle arti di costruzione si chiamano *sterro* le terre tolte, e *rinterro* quelle che servono ad inalzare certe parti del terreno.

O si tratti di valutare delle masse di fabbrica, o bisogni determinare la quantità dello sterro o del rinterro formati in un' opera di fortificazione, ci si giunge decomponendo prima queste masse in corpi meno irregolari, le cui dimensioni si deducono, tanto dalla cognizione della figura del terreno indicata dalle livellazioni, quanto da quella della forma del progetto; e calcolando quindi i volumi d'ognuno di questi corpi mediante i principii precedenti, e le regole che siamo per dare onde completare questa parte essenziale della Stereometria.

Accade spesso che la forma d'un corpo non risulta da legge veruna geometrica; e in questo caso, i volumi parziali presi insieme non possono rappresentare che per approssimazione il volume totale: d'onde la necessità di moltiplicargli sufficentemente: ma per semplicizzare le operazioni numeriche, si è convenuto di considerare certe superficie curve, come generate dal movimento d'una retta obbligata a scorrere lungo due altre rette date di posizione.

I corpi le cui superficie sono sottomesse a questa legge di generazione, si chiamano *corpi a facce gobbe*. Si vede dunque in che cosa queste superficie differiscono dalle superficie curve propriamente dette (n.° 5). Avanti di cercare le formule che convengono alla misura dei corpi a facce gobbe, consideriamo quelle che si riferiscono ai corpi terminati da superficie piane.

175. ***Misura del solido*** ABCDabcd, ***composto dei due prismi triangolari*** ABDabd, BCDbcd, ***le cui costole*** Aa, Bb, Cc, Dd ***sono perpendicolari alla base*** ABCD. (fig. 137)

Secondo il teorema del n.° 152, il prisma triangolare $ABDabd$, ha per misura $ABD \times \frac{Aa+Bb+Dd}{3}$; quello $BCDbcd$ ha parimente per misura $BCD \times \frac{Bb+Cc+Dd}{3}$; così il volume totale

$$V = ABD \times \frac{Aa+Bb+Dd}{3} + BCD \times \frac{Bb+Cc+Dd}{3}.$$

Quando la base $ABCD$ è un parallelogrammo, si ha semplicemente

$$V = \frac{ABCD}{2} \times \frac{Aa+Cc+2Bb+2Dd}{3}.$$

È chiaro che queste due formule hanno luogo quando la superficie $abcd$ è la riunione dei due triangoli abd, bcd situati in due piani diversi, come pure quando è piana.

Applicazione alla misura del volume d'un puntone.

(fig. 138, e 138*bis*) Secondo quello che precede è facile avere il volume d'un puntone. Se si concepisce infatti che questa specie di battello, le cui fig. 138 e 138 *bis.* respettivamente rappresentano il piano e la prospettiva, sia tagliato perpendicolarmente alla sua lunghezza ed al mezzo, il volume d'ogni metà $abcdABCD$, $abcdA'B'C'D'$ sarà la riunione di due prismi triangolari troncati, di cui l'uno $abcABC$ avrà per espressione $abc \times \left(\frac{2aA+cC}{3}\right)$, perchè $aA = Bb$; e di cui l'altro avrà parimente per espressione $acd \times \left(\frac{2cC+aA}{3}\right)$; dunque il volume del puntone intiero composto di due parti simmetriche, è

$$V = abc\left(\frac{2AA'+CC'}{3}\right) + acd\left(\frac{2CC'+AA'}{3}\right).$$

Per esempio,

		metri.
La larghezza maggiore.	$AB =$	1, 5
La minore	$CD =$	1, 3
La profondità del puntone	$=$	0, 8
La lunghezza maggiore.	$AA' =$	6,
La lunghezza minore	$CC' =$	4, 4

La formula precedente diverrà in virtù di questi valori.

$$V = 1{,}5 \times 0{,}4 \left(\frac{12 + 1{,}4}{3}\right) + 1{,}3 \times 0{,}4 \left(\frac{8{,}8 + 6}{3}\right);$$

ed effettuandone i calcoli indicati, avremo

$$V = 3{,}28 + 2{,}565 = 5{,}845;$$

Così il volume del puntone è di 5 metri cubi e 845 millimetri.

Calcolo d' una batteria.

176. La figura 139 rappresenta il profilo dello spalleggiamento d' una batteria, e d' un fosso innanzi per impedirne l' accesso.

Nella costruzione di queste specie d' opere, il rinterro si forma unicamente delle terre dello sterro. Per il caso di cui si tratta, la massa della batteria, astrazione fatta dalle cannoniere, può essere considerata come un prisma troncato, di cui il taglio fatto perpendicolarmente alla sua lunghezza sarebbe il quadrilatero $ABDC$. Per soddisfare in un modo sufficientemente esatto alla condizione attuale, bisogna che la superficie della sezione $ABDC$ sia equivalente a quella della sezione $EFHG$. Osserveremo adesso che l' altezza interna Cc dello spalleggiamento, le sue scarpe interna ed esterna Ac, dB, o l' angolo DBA, la sua grossezza AB alla base, e la larghezza BE del rilascio, sono comunemente date anticipatamente come pure la larghezza EG del fosso. Se si suppone adunque che la scarpa delle terre dello sterro, perchè non franino sia $\frac{1}{n}$ della profondità Hh del fosso, avremo questo problema da risolvere per conoscere questa profondità: *determinare l' altezza* Hh, *in modo che l' area* EFHG *sia equivalente all' area* ACDB, *collo stabilire d'altronde per condizione che la linea del tiro* CD *passi per il vertice* G *della contrascarpa.*

Per trattare il caso più semplice, supporremo che l' inclinazione DBA debba essere eguale all' angolo θ. Ciò posto.

Siano i dati $Ac = a$, $Bc = b$, $BE = c$, $EG = d$, $Cc = h$, ang. $DBA = \theta$;
e le incognite $DB = x$, $dD = y$, $hH = z$. I triangoli simili CcG, DdG daranno,

$$Cc : Dd :: cG : dG, \text{ ossia } h : y :: b + c + d : x + c + d;$$

d'onde, $$y=\frac{(x+c+d)h}{b+c+d};$$

ed il triangolo rettangolo DdB darà $y=px$, indicando con p il rapporto cognito $\frac{dD}{dB}$. Eguagliando questi due valori di y, se ne dedurrà successivamente.

$$x=\frac{(c+d)h}{(b+c+d)p-h}.$$

Indichiamo questo valore cognito con g', ed il valore corrispondente d'y con h'.

L'area del triangolo ACG, meno quella del triangolo DBG, essendo eguale alla sezione $ACDB$, sia per brevità $AG=m$ e $BG=m'$; avremo

$$ACDB=\frac{mh}{2}-\frac{m'h'}{2};$$

in quanto all'area della sezione $EFHG$ essa è eguale a $\left(d+d-\frac{2z}{n}\right)\frac{z}{2}$ (n.° 73); così l'equazione

$$mh-m'h'=2z\left(d-\frac{z}{n}\right),$$

esprime analiticamente che il rinterro è eguale allo sterro. Se si risolve rapporto all'incognita z, e se per semplicizzare si fa $mh-m'h'=R$, otterremo

$$z=\frac{dn}{2}\pm\frac{\sqrt{d^2n^2-2nR}}{2}.$$

Da ciò risulta, e dal non potere essere nè n, nè R negativi, che il problema è impossibile quando $2nR>d^2n^2$, o ciò che torna lo stesso quando

$$d<\sqrt{\frac{2R}{n}}.$$

ed è facile vedere che dei due valori positivi di z, il minore è il solo che sia ammissibile, poichè le dimensioni del fosso non possono essere che positive. Infatti se si prendesse $z>\frac{dn}{2}$, la larghezza $d-\frac{2z}{n}$ del fondo del fosso sarebbe negativa.

Lo spalleggiamento che si considera adesso essendo un prisma troncato, ne segue che la sua misura s'ottiene nella medesima maniera di quella d'un puntone, pertanto per

conoscerne la massa effettiva, bisogna inoltre avere riguardo al voto prodotto dalle cannoniere.

Misure dei solidi a facce gobbe.

177. Se s' immagina che una massa di terra irregolare, situata sopra un piano orizzontale, sia tagliata da un gran numero di piani verticali paralleli, e da altri piani perpendicolari a questi, questa massa sarà decomposta in solidi di cui una delle facce soltanto farà parte della superficie del solido di terra; e se si tratta di valutarne il volume, si potrà senza errore moltissimo sensibile, considerare ognuna di quelle superficie parziali come terminate da linee rette, e generate all' uso delle superficie gobbe (n.° 174). Nei lavori delle terrazze o terrapieni si fa quasi sempre così la decomposizione dei solidi da misurare; frattanto per maggiore generalità, determineremo prima il volume d' un solido a base trapezzoide.

(fig. 140) Siano $ABCD$ il trapezio che serve di base al solido $ABCDabcd$, ed AB, CD i lati paralleli. Se la superficie gobba $abcd$ opposta alla base è generata dal movimento d' una retta ab, parallela al piano verticale $AabB$, e costantemente appoggiandosi sulle linee ad, bc, e che $Aa' = bB$, $bB' = aA$, $cC' = dD$, $dD' = cC$, il solido AC' sarà visibilmente doppio del solido proposto e la base $A'B'C'D'$ sarà necessariamente piana. Per conseguenza se si conducono le diagonali AC, $A'C'$, il piano $AA'CC'$ dividerà il solido AC' in due tronchi di prismi triangolari $ABCA'B'C'$, $ADCA'D'C'$. Indicando dunque respettivamente per B', B'', i triangoli ACB, ADC, e per h, h', h'', h''', le altezze disuguali Aa, Bb, Cc, Dd, avremo per il volume v' del primo prisma,

$$v' = \left(\frac{AA' + BB' + CC'}{3}\right) B' = \left(\frac{2h + 2h' + h'' + h'''}{3}\right) B',$$

e per il volume v'' del secondo prisma,

$$v'' = \left(\frac{CC' + DD' + AA'}{3}\right) B'' = \left(\frac{2h'' + 2h''' + h + h'}{3}\right) B'';$$

per conseguenza il volume cercato del solido $ABCDabcd$, è,

$$V = \frac{v' + v''}{2} = \left(\frac{2h + 2h' + h'' + h'''}{6}\right) B' + \left(\frac{2h'' + 2h''' + h + h'}{6}\right) B'';$$

cioè che dopo avere diviso la base di questo solido in due triangoli con una diagonale qualunque, si prenderà per

base d'ogni triangolo una delle basi stesse del trapezio *ABCD*; s'aggiungeranno quindi insieme due volte l'altezze che terminano a questa base, ed una volta le altezze che terminano alla base dell'altro triangolo: si prenderà quindi la sesta parte del tutto, che si moltiplicherà per l'area del triangolo scelto per base, ed il prodotto sarà il volume d'ogni tronco di prisma triangolare: la somma finalmente di questi due prismi sarà il volume del corpo, la cui base è un trapezio.

Questo solido può non avere che una, due, o tre altezze. Quando la base *ABCD* si cangia in un parallelogrammo si ha $B' = B''$, ed allora la formula precedente si riduce a

$$V = B \times \left(\frac{h + h' + h'' + h'''}{4}\right);$$

Indicando per B la base *ABCD*. Così in questo caso, bisogna moltiplicare la base per il quarto della somma delle quattro altezze.

Della Misura dei Legnami.

178. Si costuma adesso di valutare in metri cubi, i volumi delle materie che s'impiegano nell'artiglieria, e nell'architettura militare e civile, a meno che si sia costretti a fare eseguire dei lavori in paese straniero: egli è però sempre possibile di conoscere il rapporto della misura del paese col metro, (*Aritmetica*, *Riduzioni.*) e per conseguenza d'effettuare tutti i calcoli secondo il sistema decimale.

Se si trattasse pertanto di determinare il volume d'opere di suggezione, si prenderebbe per unità di volume il decimetro cubo, che non bisogna confondere col decimo del metro cubo (n.° 101 *Aritmetica*), poichè infatti la prima unità non è che la 1000.ma parte del metro cubo, e che al contrario la seconda unità n' è la 10.ma parte.

Quando si mette in opera il legname nell'artiglieria e nei lavori di fortificazioni, si squadra prima, cioè gli si dà la forma di un parallelepipedo rettangolo; ed allora s'intende per *squadratura*, il quadrato inscritto al circolo preso per base, in un corpo d'albero non squadrato o colla *buccia*. Ma perchè gli alberi diminuiscono di grossezza andando dal piede verso i rami, si usa considerare il fusto d'un albero come un cilindro della medesima lunghezza del fusto, ed il cui diametro è eguale a quello della sezione supposta fatta nel mezzo di questa lunghezza.

Si diminuisce inoltre questo diametro d' alcuni centimetri, avuto riguardo alla scorza ed all' alburno; questa diminuzione varia però secondo la natura del legname e del paese in cui se ne fa uso.

Sia in generale d il diametro *medio* d' un albero espresso in parti di metro, ed h la sua lunghezza data in metri. In virtù del n.° 107, $\frac{d^2}{2}$ sarà l' area del quadrato inscritto al circolo che ha d per diametro, e $v = \frac{d^2}{2} \times h$ sarà (n.° 148) l' espressione del volume dell' albero squadrato.

Se si dasse al legname una o qualunque altra forma di quella che adesso supponghiamo, bisognerebbe per effettuarne la *cubatura*, ricorrere alle regole precedentemente dimostrate.

FINE DEL TOMO SECONDO.

Digitized by Google

TAVOLA

DELLE DEFINIZIONI E PRINCIPII.

SEGUITO DELL' ALGEBRA

DELLE PROPORZIONI E PROGRESSIONI

Proporzioni.

Quando quattro quantità sono in proporzione, le loro potenze e le loro radici d' un medesimo esponente lo sono pure. 87.

Progressioni.

La progressione aritmetica è una serie di numeri, tale che la differenza di due termini consecutivi è costante. 92.
Un *termine qualunque* della progressione aritmetica, si compone del primo, più tante volte la differenza quanti termini ci sono avanti quello che si cerca. 93.
La *somma dei termini* d' una progressione aritmetica è eguale a quella del primo e dell' ultimo moltiplicata per la metà del numero dei termini. ivi.
Queste due equazioni forniscono 20 formule che servono a risolvere in tutti i casi, questo problema generale; conoscendo tre delle cinque quantità seguenti, il primo termine, l' ultimo, la differenza, il numero dei termini, e la loro somma, trovare i due altri. 94.
La *progressione geometrica* è una serie di numeri, tale che il quoziente di due termini consecutivi è costante. 96.
Un *termine qualunque* della progressione geometrica è eguale al primo moltiplicato per il quoziente della progressione, alzato ad una potenza indicata dal numero dei termini che precedono quello che si cerca. 97.
Per avere la *somma dei termini* della progressione geometrica, moltiplicate l' ultimo termine per il quoziente, togliete da questo prodotto il primo termine, dividete il resto per il quoziente diminuito dell' unità. 97.
Queste due equazioni forniscono 20 formole, che servono a risolvere in ogni caso, questo problema generale: conoscendo tre delle cinque quantità seguenti, il primo termine, l' ultimo, il quoziente, il numero dei termini, e la loro somma, trovare i due altri. 97.
La somma dei termini d' una progressione geometrica decrescente all' infinito, è eguale al prodotto del primo per il quoziente, diviso per il quoziente diminuito d' una unità. 99.

Dei Logaritmi.

I *logaritmi volgari* sono termini d'una progressione aritmetica principiando dallo zero, che corrispondono a quelli d'una progressione geometrica principiando dall' unità. N°. 100.

Il logaritmo d'un produtto è eguale alla somma dei logaritmi dei suoi fattori. 104.

Il logaritmo d'un quoziente è eguale al logaritmo del dividendo, meno il logaritmo del divisore. 105.

Il logaritmo d'una potenza qualunque d'un numero, trovasi moltiplicando il logaritmo di questo numero per l'esponente della potenza. 106.

Il logaritmo della radice qualunque d'un numero, si trova dividendo il logaritmo di questo numero per l'esponente della radice. 107.

Il logaritmo d'un estremo d'una proporzione è eguale alla somma dei logaritmi dei medii, meno il logaritmo dell'estremo noto. 109.

Il logaritmo d'un medio è eguale alla somma dei logaritmi degli estremi meno il logaritmo del medio noto. 109.

Il logaritmo del medio in una proporzione continua, è eguale alla metà della somma dei logaritmi degli estremi. 110.

Basta avere i logaritmi dei numeri primi per formarne tutti gli altri 114.

La *caratteristica* d'un logaritmo, è il numero intero che precede la frazione decimale: essa indica in qual decade è il numero a cui corrisponde questo logaritmo; può essere soppressa senza inconveniente nelle tavole dei logaritmi volgari. 116.

Se si moltiplica o si divide un numero qualunque per una potenza di 10, la frazione decimale nel logaritmo del prodotto, o in quello del quoziente, sarà la medesima che nel logaritmo del numero primitivo. 117.

I logaritmi delle frazioni minori dell' unità essendo negativi, si è immaginato per evitargli, d'aumentare di 10 unità la caratteristica del logaritmo del numeratore. 118.

La somma dei quadrati dei numeri naturali da 1 fino ad n, trovasi facendo il prodotto dei tre fattori n, $n+1$, $2n+1$, e dividendolo per 6; questa formula serve a valutare il numero delle palle d'una *piramide a base quadrata.* 120 a 122.

La somma dei numeri triangolari da 1 fino $\frac{1}{2}(n^2+n)$, si trova facendo il prodotto dei tre fattori n, $n+1$, $n+2$, e dividendolo per 6; questa formula serve a valutare le palle della *piramide triangolare.* 123.

Il numero delle palle d'una *piramide bislunga* a base rettangolare si calcola moltiplicando il numero delle palle d'una faccia triangolare per il terzo della somma delle tre custole parallele, o questa somma per il terzo del numero delle palle della faccia triangolare. 124.

Il numero delle *combinazioni* d'm lettere prese n ad n, sarà m^n se si ripete la stessa lettera nella medesima combinazione, e se si dispongono le n lettere in tutti i modi possibili. 130.

Il numero delle combinazioni d'm lettere prese n ad n, sarà $m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)$, se non si ripete la stessa lettera nella medesima combinazione, e se d'altronde si dispongono le n lettere in tutti i modi possibili: queste specie di combinazioni si chiamano *permutazioni.* 131.

Il numero delle combinazioni d'm lettere n ad n sarà ..... $\dfrac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n}$, se non si ammettono le

combinazioni composte delle medesime lettere, nè la repetizione d' una medesima lettera nell' istessa combinazione: queste combinazioni rappresentano dei *prodotti differenti.* N.° 132.

Nello sviluppo della potenza m del *binomio* $(x+a)$, il numero dei termini è $m+1$; il primo termine è x^m, il secondo $mx^{m-1}a$, gli esponenti d' x vanno sempre diminuendo d' una unità, quelli di a aumentando d' una unità: il coefficiente d' un termine qualunque, è il prodotto del coefficiente del termine precedente per l' esponente d' x di quest' istesso termine, diviso per il numero ch' esprime l' ordine di questo termine. 133 a 138.

La formula dello sviluppo della potenza m d' un binomio è generale, ed è parimente applicabile al caso in cui m sia *frazionario*; può dunque servire all' estrazione delle radici. 145 a 146.

Serve anche al caso degli *esponenti negativi.* 147.

Lo sviluppo in serie della quantità esponenziale a^x è la base del calcolo dei logaritmi 148 a 149.

Dall' equazione $y=a^x$ si deducono le formule logaritmiche. 150 a 156.

GEOMETRIA

LIBRO PRIMO.

CAPITOLO I.

PRINCIPII FONDAMENTALI.

Lo spazio occupato dai corpi ha tre dimensioni, *lunghezza*, *larghezza*, e *grossezza*.

I limiti dei corpi sono le *superficie*, e non hanno che due dimensioni, lunghezza e larghezza.

I limiti delle superficie sono le *linee*, e non hanno che una dimensione qual è la lunghezza. I limiti delle linee sono i *punti* senza veruna dimensione. N.° 1.

La linea retta è il più corto cammino da un punto ad un altro. 2.

Ogni linea che non è retta nè composta di linee rette è *curva*. 3.

Il *piano* o la *superficie piana* è quella su cui si concepisce che una retta possa esattamente applicarsi in ogni senso. 4.

Ogni superficie che non è nè piana, nè composta di piani, è curva. 5.

La linea *circolare* o la *circonferenza del circolo*, è una curva di cui tutti i punti situati in un medesimo piano, sono egualmente lontani da un altro punto preso dentro a questo piano, e che chiamasi *centro*. 6.

Una retta non può incontrarne un' altra che in un solo punto. 7.

Un *angolo* è lo spazio indefinito compreso fra due rette che si tagliano, e che possono concepirsi prolungate quanto si vorrà. 8.

Due angoli sono eguali, quando essendo posti l' uno sull' altro si ricoprono perfettamente. 9.

Una linea è *perpendicolare* sopra un' altra, quando fa con qoell'altra due angoli adiacenti eguali; ognuno di essi, si chiama *angolo retto*. 10.
Ogni angolo minore d' un angolo retto si chiama *angolo acuto*. 11.
Ogni aogolo maggiore d'un angolo retto si chiama *angolo ottuso*. ivi.
Ogni retta che ne incontra un' altra fa con questa due *angoli adiacenti* la cui somma è eguale a due angoli retti. N.° 12.
Tutti gli *angoli consecutivi* formati dalla medesima parte d' un' istessa linea retta, ed avendo il loro vertice comune, equivalgono insieme a due angoli retti. 13.
Quando doe rette si tagliano, gli *angoli opposti al vertice* sono eguali. 14.
Tutti gli angoli che si possono formare attoroo ad un punto equivalgono a 4 angoli retti. 15.
Un *triangolo* è lo spazio racchiuso fra tre rette che si tagliano due a due. 16.
Due triangoli sono eguali quando hanno un angolo eguale compreso fra due lati respettivamente eguali. 17.
Oppure un lato eguale adiacente a due angoli respettivamente eguali. 18.
In ogni triangolo un lato qualuoque è minore della somma degli altri due. 19.
Se da un punto preso nell' interno d'un triangolo si conducono delle rette ai due angoli del triangolo, la somma di queste rette sarà minore di quella dei due lati del triangolo che le circondano. 20.
Se due triangoli hanno un angolo disuguale compreso fra doe lati respettivamente eguali, il terzo lato opposto all'angolo minore, sarà minore del terzo lato opposto all' angolo maggiore. 21.
Due triangoli sono eguali se hanno i loro tre lati respettivamente eguali. 22.
Da un punto preso sopra una retta, ooo si può alzare che uoa sola perpendicolare su questa retta. 23.
Quando da un punto preso fuori d' una retta, si conducooo diverse linee a diversi punti da questa retta, 1.° la perpendicolare è minore d' ogni u*bliqua*; 2.° le oblique che si allontanano egualmente dal piede della perpendicolare sono eguali; 3.° di due oblique disuguali, la più lunga è quella che maggiormente si allontana dal piede della perpendicolare. 24.
Se on triangolo ha due lati eguali, gli angoli opposti a questi lati sono eguali e reciprocamente. 26.
Se due lati d' un triangolo sono disuguali, l' angolo maggiore è opposto al lato maggiore e reciprocamente. 27.
Due rette sono dette *parallele* quando essendo sitoate sopra uo medesimo piano, non possono mai incontrarsi. 28.
Se due parallele sono tagliate da una terza linea retta, la somma dei due *angoli interni da una medesima parte* sarà eguale a doe angoli retti. 29.
Gli angoli *corrispondenti* sono eguali, gli *alterni interni* sono eguali, gli *alterni esterni* sono eguali. ivi.
Due rette parallele ad una terza sono parallele fra loro. 30.
Due parallele sono dappertutto egualmente distanti. 31.
Se due angoli hanno i lati respettivamante paralleli e diretti nel medesimo senso, sono egnali. 32.
Ogni retta condotta dal centro alla circonferenza è un *raggio*. 33.
Un *arco* è ona porzione della circonferenza. ivi.
La *corda* d' uo arco è la retta che unisce le sue estremità. ivi.
La corda che passa per il centro è un *diametro* che è doppio del raggio. ivi.

Digitized by Google

CAPITOLO II.

Teoria delle linee proporzionali.

Due parallele condotte a traverso a due rette che partono da un medesimo punto, sono tagliate in parti proporzionali da queste rette. N.° 52.

Se dall' angolo retto d' un triangolo rettangolo s'abbassa una perpendicolare sull' ipotenusa, 1.° questa perpendicolare dividerà il triangolo in due altri che gli saranno simili; 2.° sarà media proporzionale tra i due segmenti e l' ipotenusa; 3.° ogni lato dell' angolo retto del triangolo proposto, sarà medio proporzionale fra l' ipotenusa intera ed il segmento adiacente. 53.

Le parti di *due corde che si tagliano nel circolo* sono reciprocamente proporzionali, d' onde ne segue che ogni perpendicolare al diametro è media proporzionale fra i due segmenti che forma su questo diametro. 54.

Se da un punto fuori del circolo si conducono *due seganti terminate alla parte concava della circonferenza*, queste seganti intiere saranno reciprocamente proporzionali alle loro parti esterne. 55.

Ogni *tangente al circolo* è media proporzionale fra la segante intiera e la sua parte esterna. 56.

Due poligoni sono simili, se hanno gli angoli respettivamente eguali ed i lati omologhi proporzionali. 57.

Due *poligoni regolari* d' un medesimo numero di lati, sono figure simili. 58.

Ogni poligono regolare può essere inscritto o circoscritto al circolo. 59.

Il raggio del circolo inscritto si chiama *apotema* del poligono. ivi.

I *perimetri* di due poligoni regolari d' un medesimo numero di lati sono proporzionali ai raggi dei circoli, inscritti e circoscritti. ivi.

Due poligoni simili sono composti d' un medesimo numero di triangoli respettivamente simili e similmente disposti. 60.

Il lato dell' *esagono regolare* inscritto è eguale al raggio. 61.

Il lato del *decagono regolare* è eguale alla parte maggiore del raggio del circolo circoscritto, diviso in media ed estrema ragione. 62.

Ogni linea curva o poligona che circonda, da un' estremità all' altra una linea convessa è più lunga della circondata. 63.

Le circonferenze dei circoli stanno fra loro come i diametri. 64.

Il rapporto della circonferenza al diametro, secondo Archimede, è come 22 : 7, e secondo Mezio, come 355 : 113. ivi.

Sia 1 il raggio del circolo, a la corda d' un arco; quella della sua metà $= \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}}$. 65.

Sia p il perimetro d' un poligono regolare inscritto $r^{(n)}$ il suo apotema, 1 il raggio del circolo; il perimetro del poligono simile circoscritto sarà $\dfrac{p}{r^{(n)}}$. ivi.

CAPITOLO III.

Area dei poligoni e del circolo.

L' *area* è l' estensione della superficie d' una figura. 66.

L' unità di misura è il quadrato. ivi.

I *parallelogrammi* che hanno basi eguali ed altezze eguali, sono *equivalenti*. 67.

Ogni triangolo è la metà d' un parallelogrammo della stessa base e della stessa altezza. 68.

Due rettangoli della medesima altezza stanno fra loro come le loro basi e reciprocamente. 69.

CAPITOLO IV.

Paragone dell' aree delle figure simili.

CAPITOLO V.

APPLICAZIONI DEI PRINCIPII.

Soluzioni grafiche.

Digitized by Google

Soluzioni col calcolo.

LIBRO II.

CAPITOLO PRIMO.

Proprietà dei piani che s'incontrano, e delle linee rette tagliate da piani paralleli.

L'intersezione di due piani è una linea retta. N.° 119.
Per un punto come pure per una retta si può fare passare un' infinità di piani diversi. ivi.
La posizione di tre punti, come pure quella di due rette che si tagliano o che sono parallele determina la posizione d'un piano. ivi.
Una retta è perpendicolare ad un piano, quando lo è a due rette che passano per il suo piede e tracciate su questo piano. 120.
Di tutte le rette condotte da un punto ad un piano, la minore è la perpendicolare, e la più lunga è quella che più s' allontana dal piede di questa perpendicolare. 121.
Se dal piede d' una perpendicolare ad un piano, si abbassa una perpendicolare sopra una linea condotta su questo piano, e che si tira una retta dal piede di questa seconda perpendicolare ad un punto qualunque della prima, questa retta sarà perpendicolare alla linea condotta nel piano. 122.
Se una retta è perpendicolare ad un piano, ogni linea parallela a questa sarà perpendicolare al medesimo piano. 123.
Ogni retta parallela ad una linea condotta in un piano, è parallela a questo piano. 124.
Due piani perpendicolari ad una medesima retta, sono paralleli fra loro; reciprocamente se una linea è perpendicolare ad uno dei piani paralleli, sarà perpendicolare ancora all' altro. 125.
Le intersezioni di due piani paralleli con un terzo piano sono parallele. 126.
Le parallele comprese fra due piani paralleli sono eguali. 127.
Se due angoli non situati nel medesimo piano, hanno i lati paralleli e diretti nel medesimo senso, quest' angoli saranno eguali, ed i loro piani saranno paralleli. 128.
Due rette comprese fra due piani paralleli, sono tagliate in parti proporzionali da un terzo piano condotto parallelamente agli altri due. 129.

CAPITOLO II.

Angoli poliedri.

Si chiama angolo *diedro*, cioè angolo a due facce, l'inclinazione di due piani. 130.
L'angolo diedro è misurato dall'angolo che formano fra loro le due perpendicolari condotte in ognuno dei due piani alla loro comune sezione. 131.
Due piani che si traversano, presentano le medesime proprietà di due linee che si tagliano. 132.
La teoria di due piani paralleli è la medesima di quella delle linee parallele. ivi.
Se una retta è perpendicolare ad un piano, ogni piano che passerà per questa retta, sarà perpendicolare all' altro piano. 133.

Digitized by Google

Se due piani sono perpendicolsri ad nn terzo piano, la sezione comnne dei due primi è perpendicolare al terzo. N.° 133.

Si chiama *angolo solido* o *angolo poliedro*, lo spazio indefinito compreso fra diversi piani che si riuniscono al medesimo punto. 134.

La somma di due qualunque degli angoli piani che compongono un angolo triedro, è sempre maggiore del terzo. 135.

La somma degli angoli piani che compongono un angolo poliedro convesso, o a costole saglienti è sempre minore di 4 angoli retti. 136.

Se due angoli *triedri* sono formati da tre angoli piani respettivamente eguali e disposti nella medesima maniera, quest' angoli saranno eguali e da soprapporsi. 137.

CAPITOLO III.

Dei poliedri.

Si chiama *poliedro* nno spazio terminato da diversi piani. 139.

Lo spazio terminato da quattro piani, si chiama *tetraedro*. ivi.

Ogni corpo di cui nna faccia è un poligono, e di cui tutte le altre facce sono trisogoli col loro vertice ad un medesimo punto, si chiama *piramide*. ivi.

Si chiama *prisma* un corpo compreso sotto due facce opposte eguali e parallele, e di cui tutte le altre facce sono parsllelogrammi. ivi.

L' altezza d' un prisma, è una perpendicolare abbassata da nn punto d' una delle sue basi sull' altrs base. ivi.

Si chiama *parallelepipedo* un prisma che ha per base un parallelogrammo. ivi.

Il *cubo* o *l' esaedro* regolare è il parallelepipedo di cui tutte le facce sono quadrati. ivi.

La diagonale d' un poliedro, è la retta che unisce i vertici di due angoli poliedri non adisceoti. ivi.

Le facce opposte d' un parallelepipedo sono ugnali; e le diagonsli si tagliano scambievolmente in due parti eguali. 140.

Se gli angoli triedri omologhi delle piramidi triangolari sono composti di triangoli eguali e similmente disposti, queste piramidi sono eguali. 141.

Le piramidi triaogolari sono anche egusli se hanno nn angolo driedro eguale, compreso fra due fscce respettivamente eguali e rinnite nella stesss guisa. 141.

Due prismi sono eguali, se hanno un angolo triedro compreso fra tre piani respettivamente eguali, e riuniti nella stessa guisa. ivi.

Se si taglia un prisma con un piano parallelo alla base, la sezione risultante sarà eguale a questa base. 142.

Se si taglia nna piramide qualunque con un piano parallelo alla base, i suoi lati e la sua altezza saranno proporzionstamente divisi, e la sezione sarà nn poligono simile alls base. 143.

CAPITOLO IV.

Misura del volume dei prismi e delle piramidi.

Il *volume* d' nn corpo è lo spazio che occups. 144.

Due parallelepipedi della medesima base e della medesima altezza sono equivalenti fra loro. 145.

Dne parallelepipedi rettangoli che hanno la medesima base, stanno fra loro come le loro altezze. 146.

Due parallelepipedi rettangoli che hanno la medesim' altezza, stanno fra loro come le loro basi. N.° 147.

Due parallelepipedi rettangoli qualunque stanno fra loro come i prodotti delle loro basi per le loro altezze, o come i prodotti delle loro tre dimensioni. 148.

Il cubo è l'unità di misura dei volumi. ivi.

Il volume d'un prisma qualunque è eguale al prodotto della sua base per la sua altezza. ivi.

Due tetraedri di basi equivalenti, e della stessa altezza, sono equivalenti. 149.

Un tetraedro è equivalente al terzo del prisma triangolare della medesima base e della medesim' altezza. 150.

Og ni piramide ha per misura il terzo del prodotto della sua base per la sua altezza. ivi.

Ogni *tronco* di *piramide triangolare*, ossia piramide tagliata da un piano parallelo alla sua base, è equivalente a tre piramidi, che avrebbero per altezza comune quella del tronco, e di cui una avrebbe per base la base inferiore del tronco, l'altra la base superiore, e la terza una media proporzionale fra queste due basi. 151.

Se si taglia un prisma triangolare con un piano inclinato alla base, il corpo rimanente sarà equivalente alla somma di tre piramidi che avrebbero la medesima base del prisma, ed i cui vertici sarebbero quelli degli angoli della sezione. 152.

CAPITOLO V.

Similitudine dei poliedri.

Le costole omologhe di due poliedri simili sono proporzionali; le loro facce omologhe stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi. ivi.

Questi poliedri possono essere decomposti in un medesimo numero di piramidi triangolari, respettivamente simili e similmente disposte. 153.

Due piramidi simili stanno fra loro come i cubi delle loro costole, o linee omologhe. 154.

Due poliedri simili stanno come i cubi dei lati omologhi. ivi.

CAPITOLO VI.

Corpi tondi e loro principali proprietà.

Il *cilindro retto* può essere generato da un rettangolo che gira attorno d'uno dei suoi lati denominato l'asse. 155.

Il *cono retto* può essere concepito come generato da un triangolo rettangolo che gira intorno ad uno dei lati dell'angolo retto. 156.

D'onde ne segue che ogni sezione parallela alla base è un circolo. ivi.

Che ogni sezione secondo l'asse è un triangolo. ivi.

La *sfera* è un corpo terminato da una superficie curva, di cui tutti i punti sono egualmente lontani da un punto interno denominato *centro*. 157.

L'intersezione della sfera con un piano è un *circolo massimo* se il piano passa per il centro della sfera; un *circolo minimo* se non ci passa. ivi.

La porzione di superficie sferica compresa fra due semi-circoli massimi che si tagliano, si chiama *fuso sferico*. ivi.

La porzione compresa fra due piani paralleli, chiamasi *zona*. ivi.

CAPITOLO VII.

Della misura dell' area dei corpi tondi.

CAPITOLO VIII.

Misura del volume dei corpi tondi.

CAPITOLO IX.

Paragone dei corpi tondi: poliedri regolari: similitudine dei corpi tondi.

CAPITOLO X.

Misura dei volumi dei corpi che costituiscono le opere di fortificazione.

Fine della Tavola.

ERRATA.

TOMO PRIMO.

Pag. v. ultimo vers.	Banchi Cav. Capitano di Cavalleria Toscana	*Leg.*	Bausani Sergente d' Artiglieria Toscana.
» 19 *V.* 24	Centinaja	»	diecine
» 75 6	indeterminato,	»	indeterminato;
» 44 ultimo vers.	quello	»	quelle

TOMO SECONDO.

Tav. V. bis	Tav. IV. bis

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 55
Fig. 61
Fig. 66.
Fig. 67.
Fig. 72.

Fig 77

Fig 78
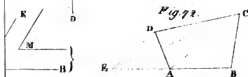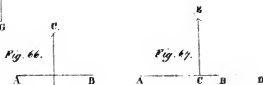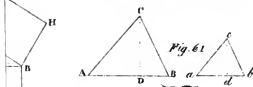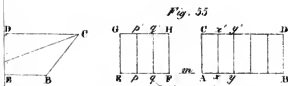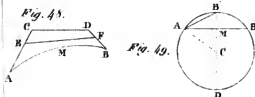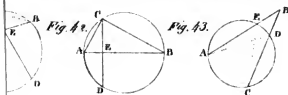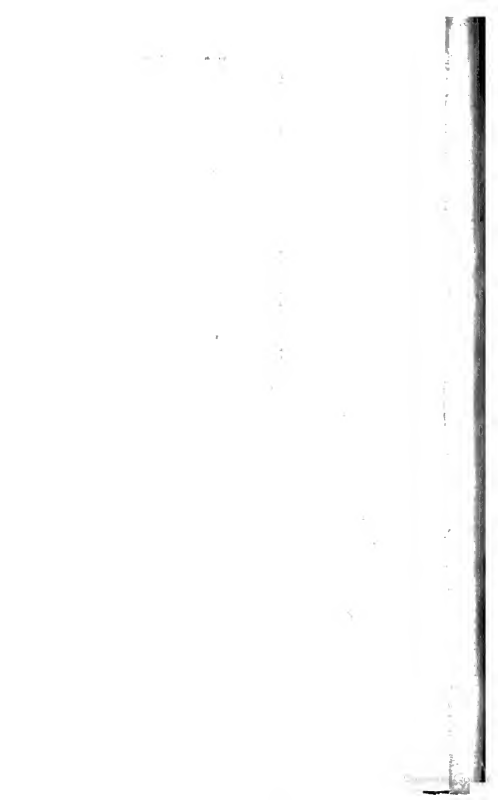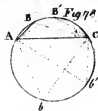
Fig 83.
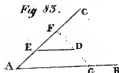
Fig 88.
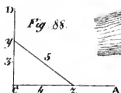
Fig 89

Fig 93

Fig 94.

Fig 99

Fig 105

Fig. 111.

Fig. 112.

Fig. 114.

Fig. 117

Fig. 118
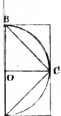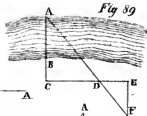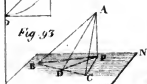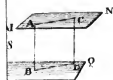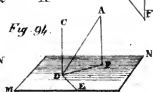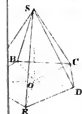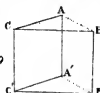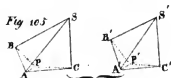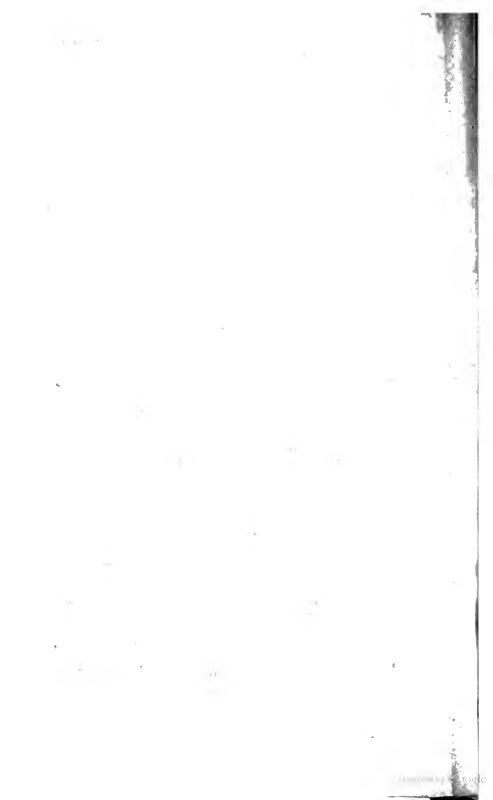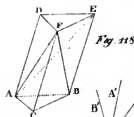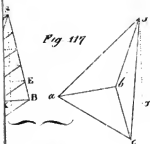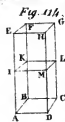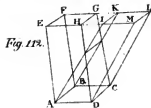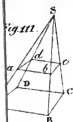
Fig. 123.

Fig. 124.

Fig. 125

Fig. 131.

Fig. 132.

Fig. 136.

Fig. 137.

Digitized by Google
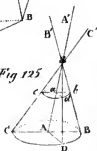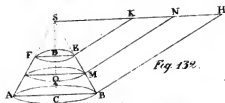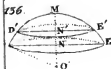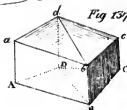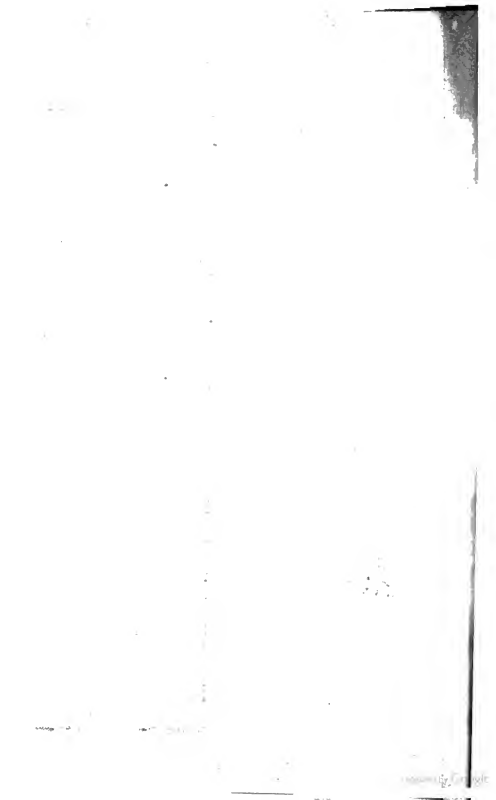
Fig. 138 bis.

Fig. 139.

Fig. 140.